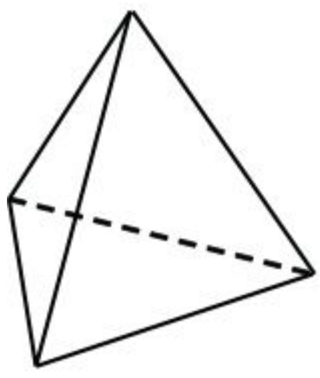
イマジナリーキューブパズルとその数理

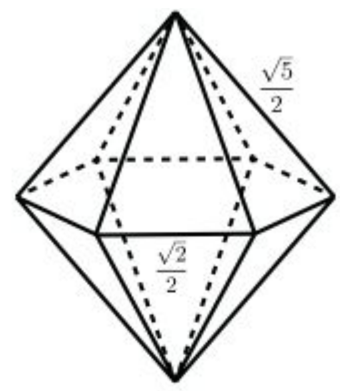
立木秀樹

2020オープンキャンパス模擬授業

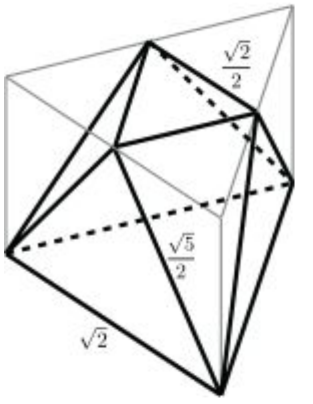
次の立体は，立方体の箱にきれいに収まります。それぞれ，入れ方を考えてください。



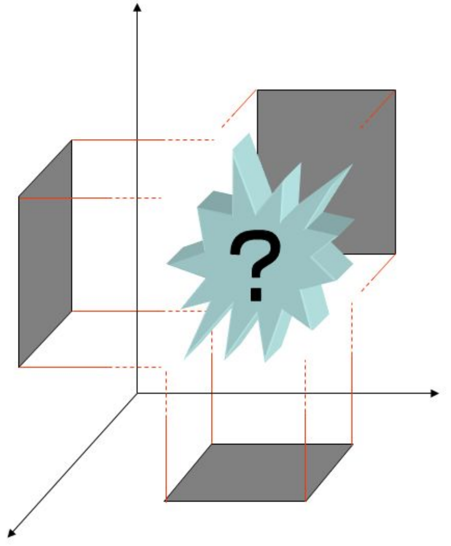
正四面体



H

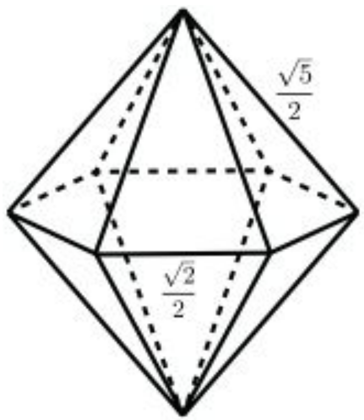


T



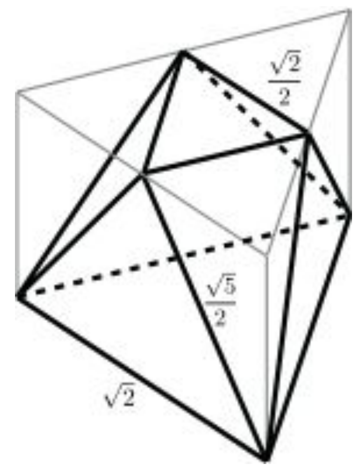
立方体と同じように，直交する3方向から見て正方形に見える立体のことを，**イマジナリーキューブ**といいます。

イマジナリーキューブ H と T



H

重六角錐
(Hexagonal Bipyramid)
六角錐を2つ底面で張り合わせた形



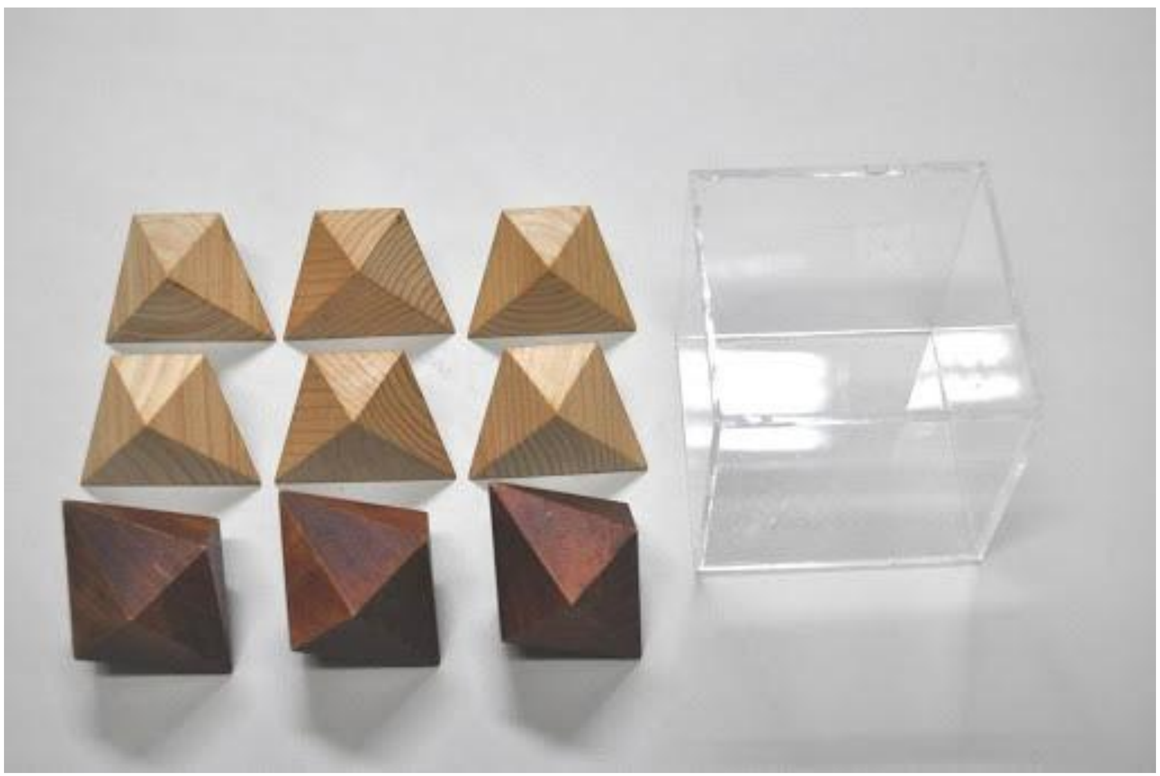
T

半三角錐台
(Triangular Antiprismoid)
三角柱の3つの頂点の周りを切った形

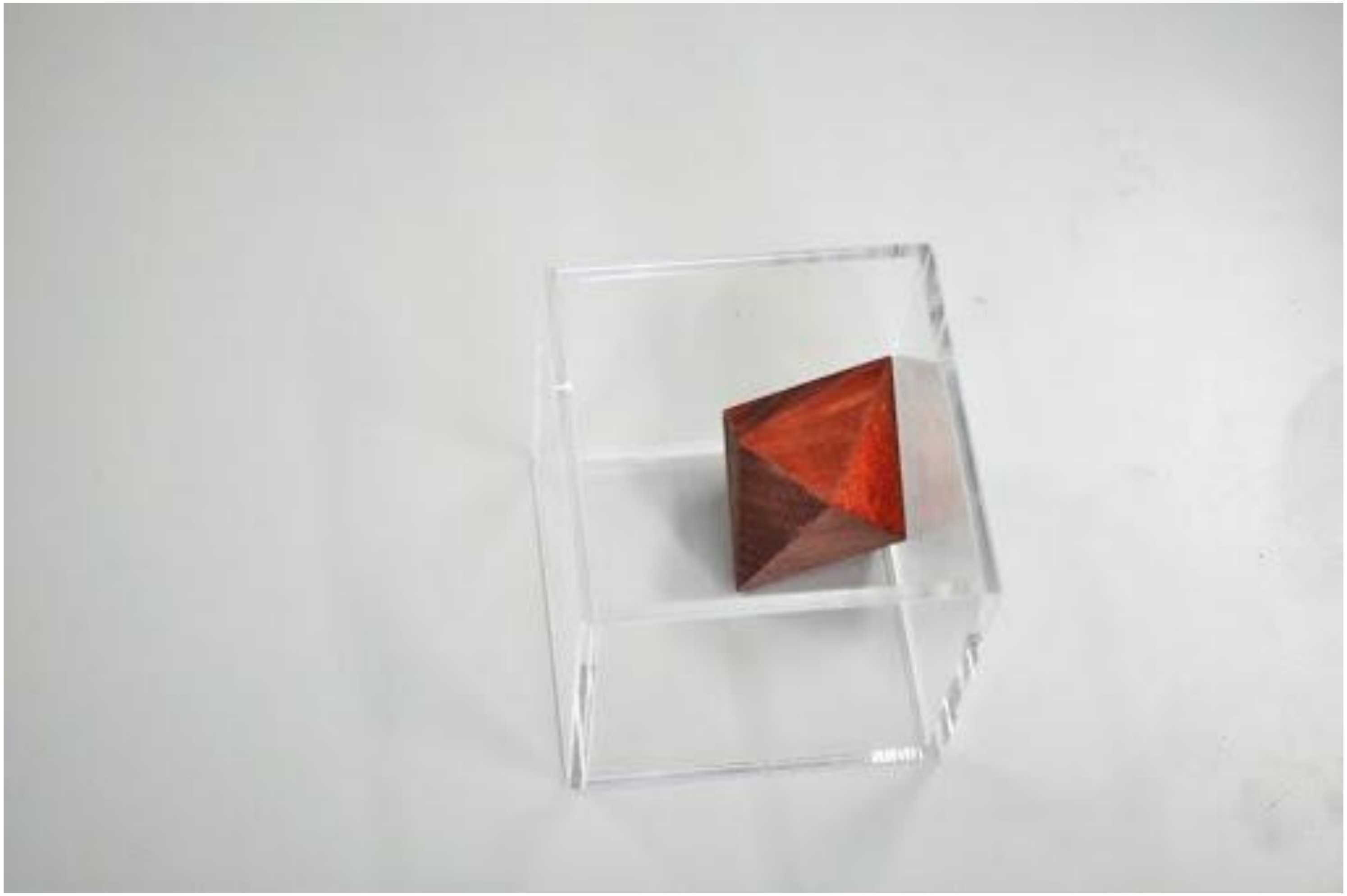
3H=6T パズル

問題:3 個の H と 6 個の T を，２倍の大きさの箱に，ピースとピースの間に隙間ができないようにつめてください。

箱との間には隙間があっても構いません。



真ん中に穴を作ることを意識して



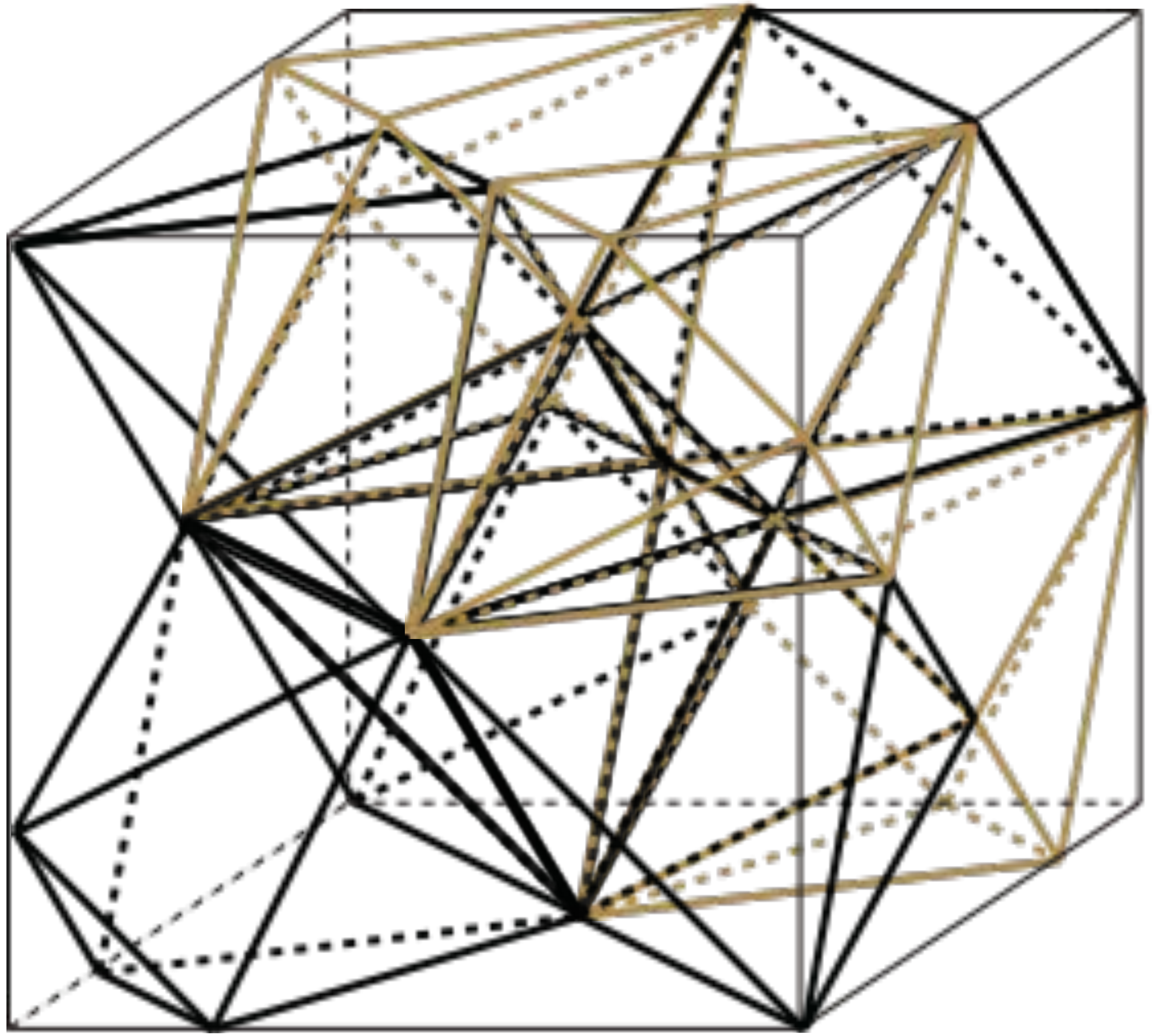
お隣と面の形を合わせよう。

穴の形に注目！

Tが収まる

あとは面の形をよく見て合わせていく

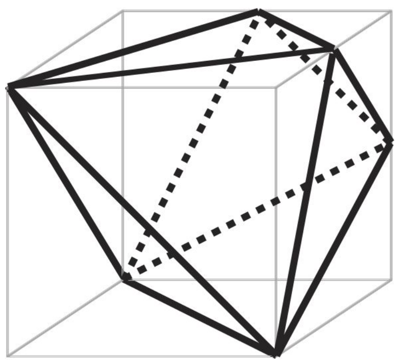
完成

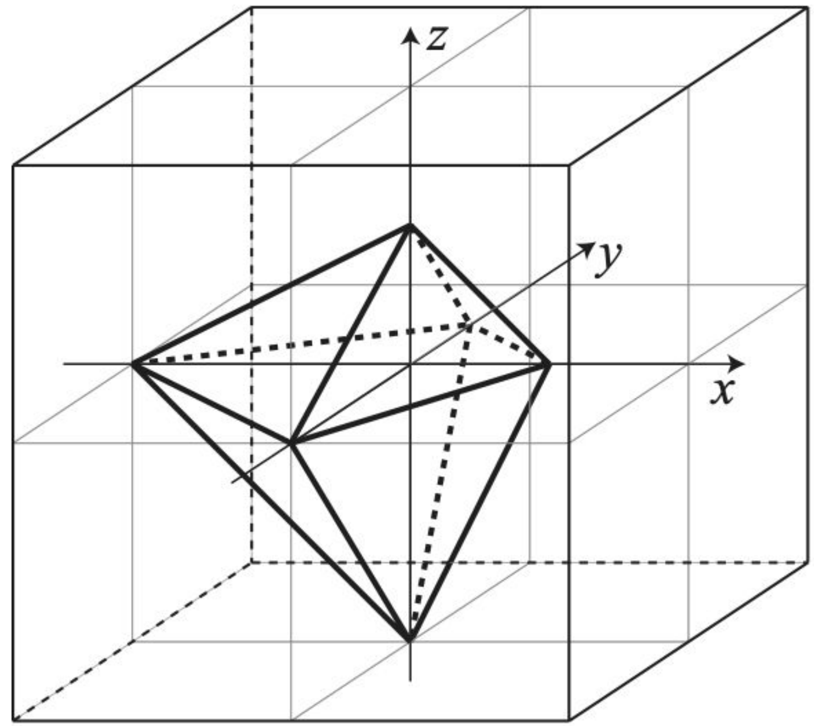


3回対称性

なぜ，うまくいったの？

T (左)と，パズルの真ん中の穴の形(右) が同じ形だから。



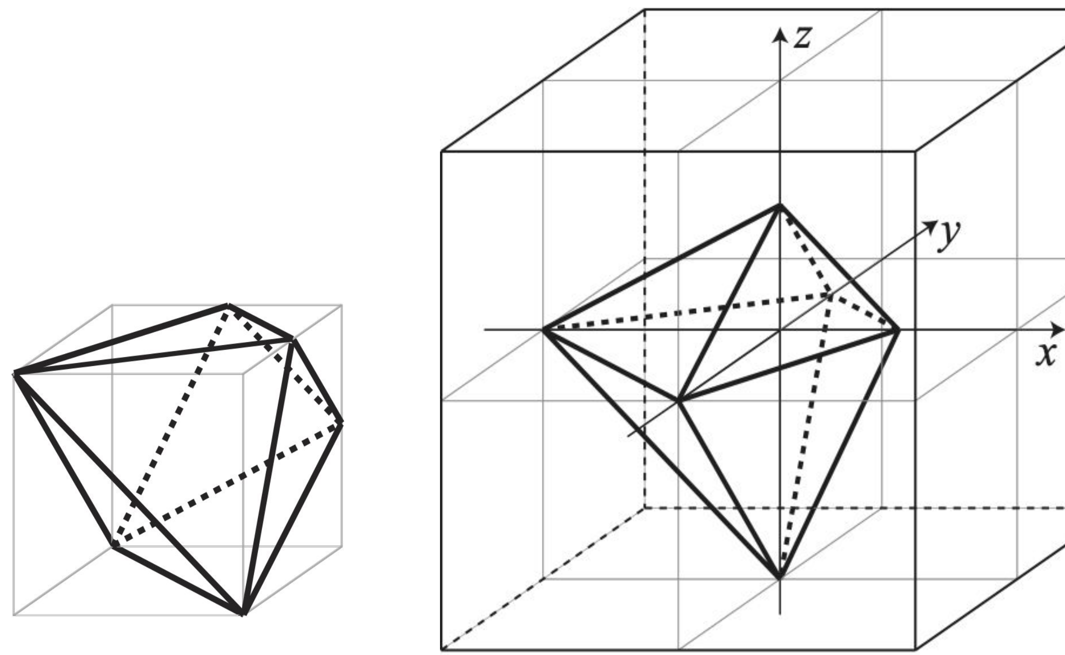


でも，本当に同じ形なの？

箱に収まって見えるからといって，信じていいの？

両者が合同であることを証明しよう。

合同であることの証明1



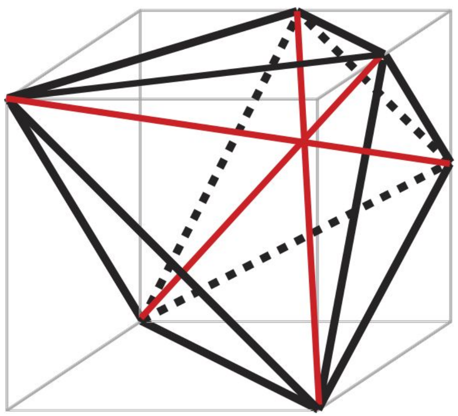
証明1：両者は8つの面がそれぞれ合同で，面の繋がり方も同じだから。

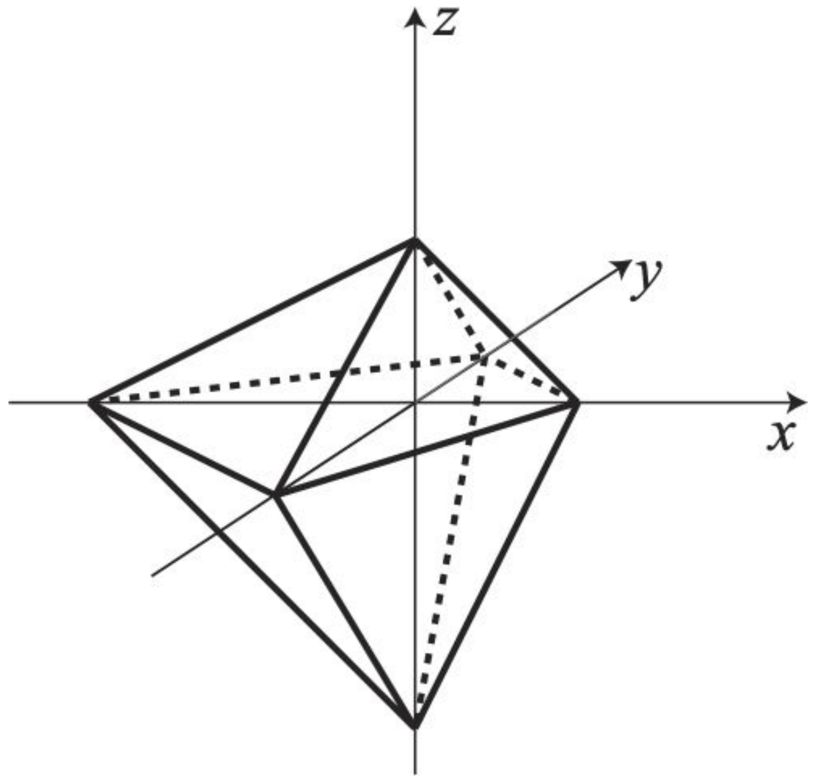
その通り。だけど，だから合同というのは自明だろうか？

他の証明も考えよう。

証明の方針

３本の対角線が一点で交わり，お互いに直交することを言えばよい。

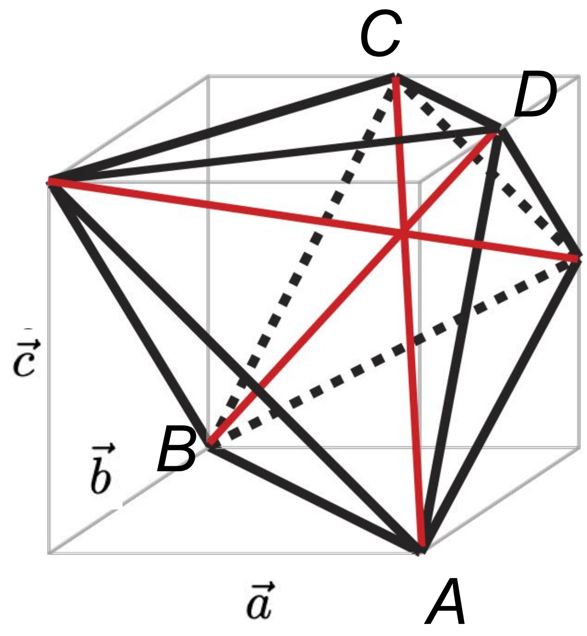




どうやって，直交をいう？

証明2：ベクトルを用いる

内積 = 0 を言えばよい。



$$\vec{AC} = (\vec{a}/2 + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$$
$$\vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}/2 + \vec{c}) - \vec{b}$$

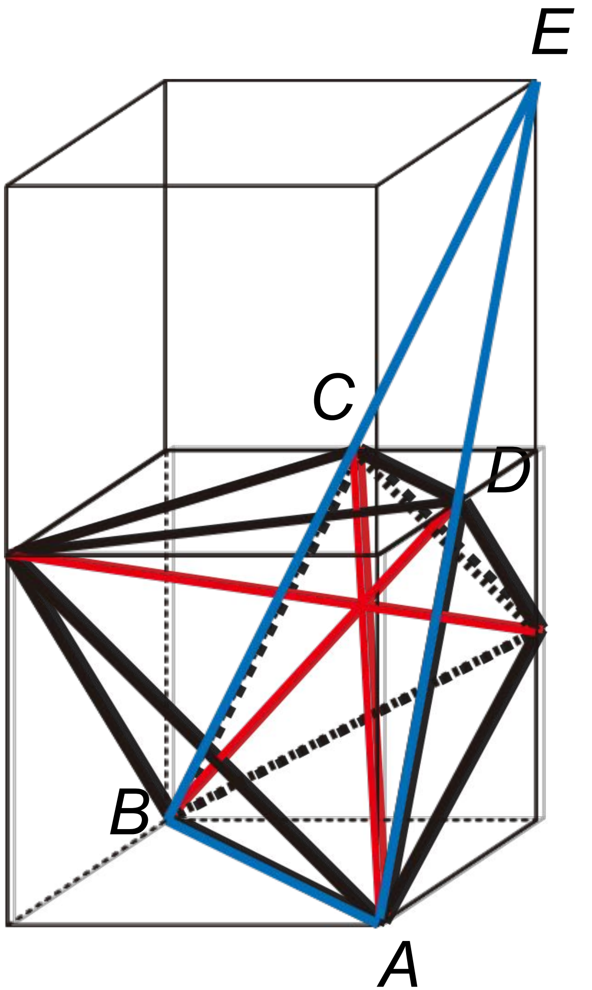
$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{BD} &= (-\vec{a}/2 + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}/2 + \vec{c}) \\ &= -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2/2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/3$ は，AC, BD 上にある。よって，１点で交差する。

交点Oに対してAOが $\vec{a}$ と同じ長さであることも内積計算で分かる。

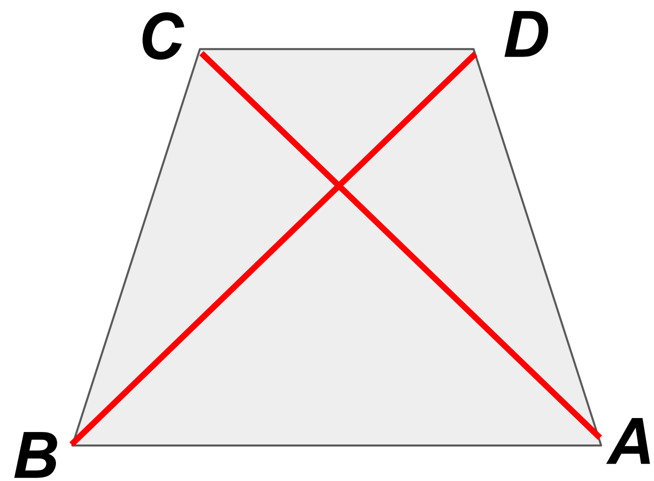
他の証明はないか？

証明 3:幾何的な証明

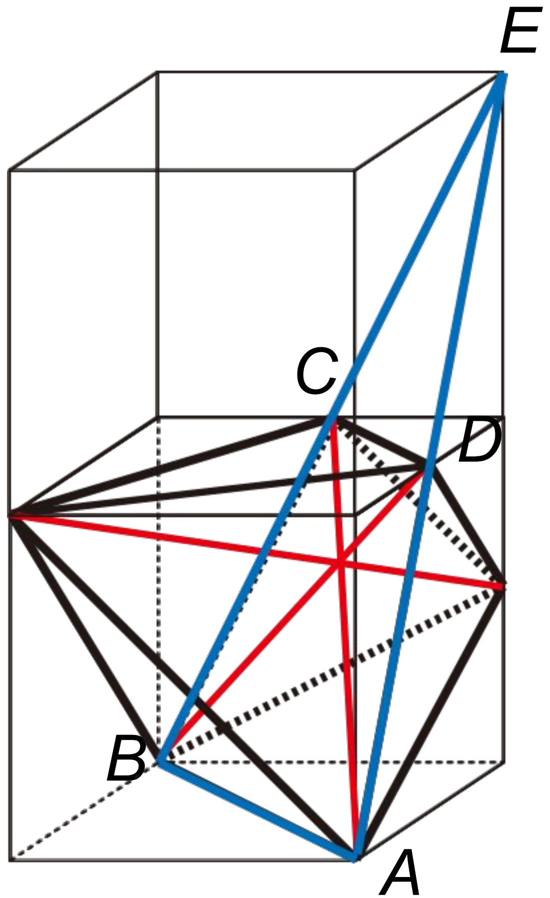


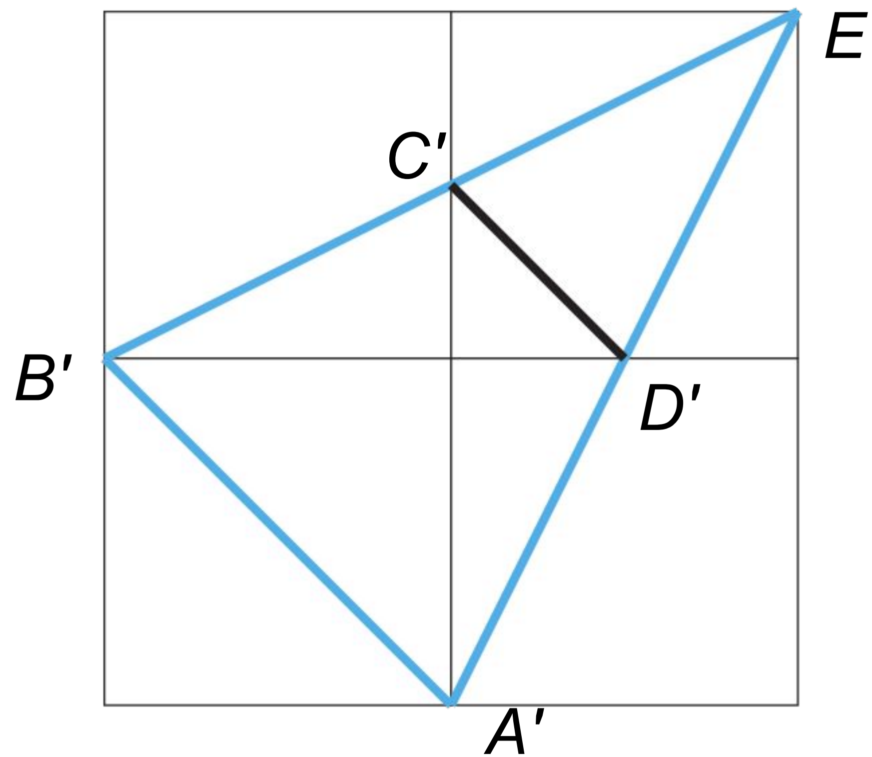
AB と DC が平行なので，ABCD は同一平面上にある。

四角形 ABCD は台形。この台形の2本の対角線が直交することを言えばよい。



上にもう一つ立方体を考え，二等辺三角形 EAB を考える。C, D はBE, AE の中点である。





ところで，右の絵のように，正方格子に対して二等辺三角形E'B'A'を描く。

この3辺の長さはEBA と等しいので，両者は合同。C', D' は中点なので，C, D と対応している。つまり，台形ABCD とA'B'C'D' は合同である。

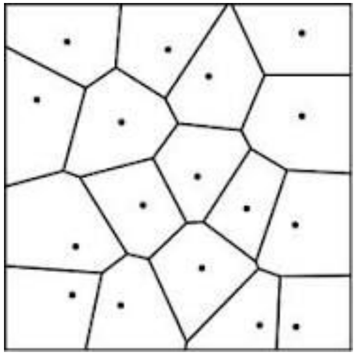
A'B'C'D' を見ると，対角線が直交しており，交点は 2:1 に内分し，2 の長さは正方形の1辺の長さに等しい。

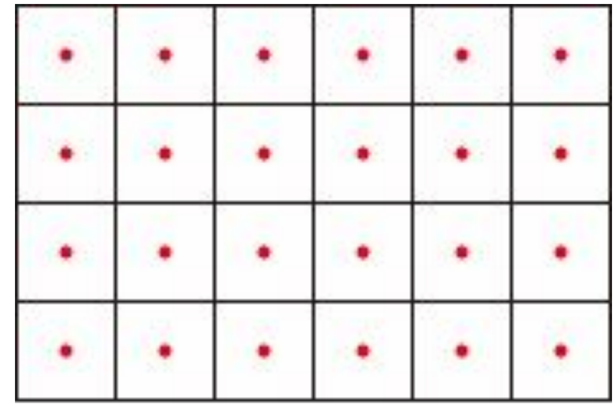
ＨとＴがきれいに組み合わさる秘密？

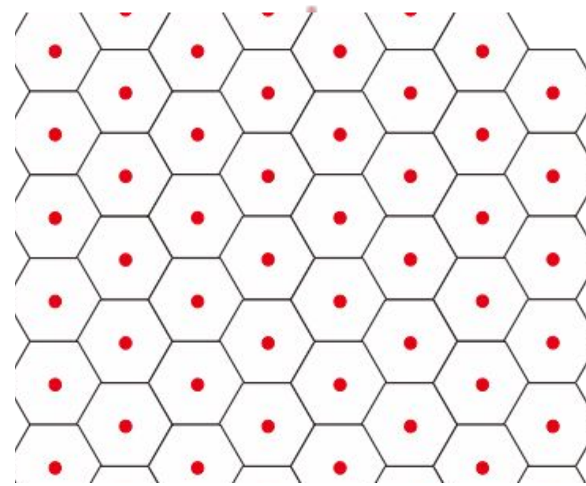
ＨとＴによる空間充填

ＨとＴはこの三次元空間を埋め尽くす

Voronoi タイリング

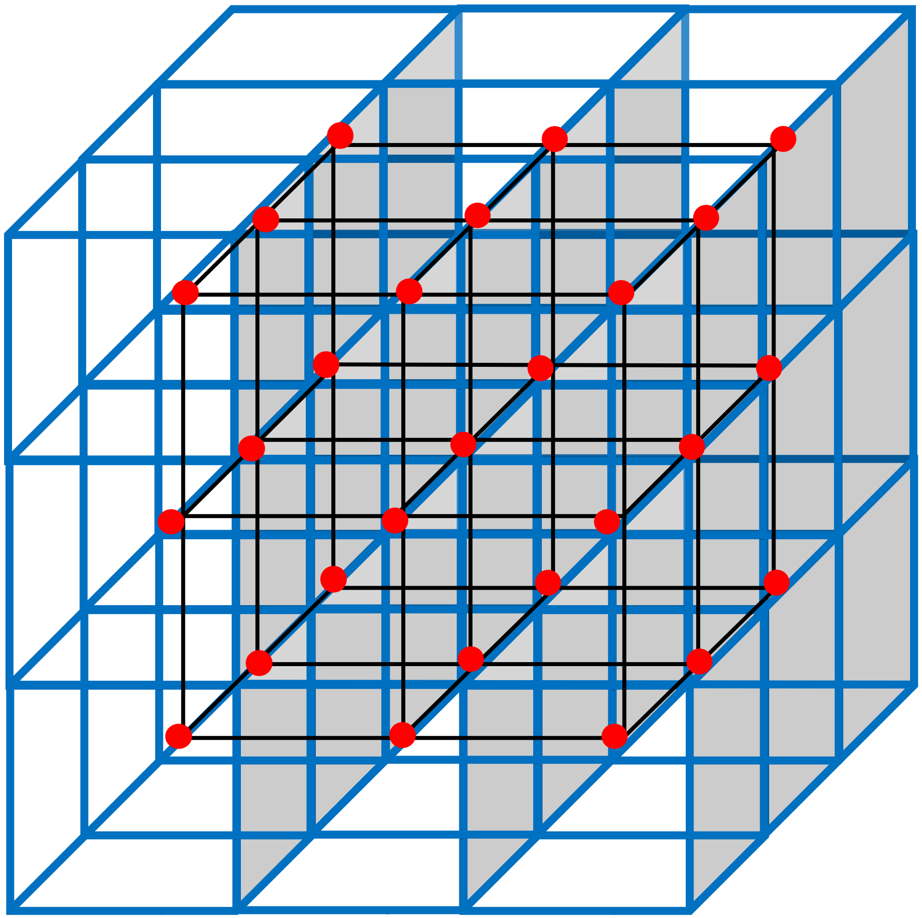






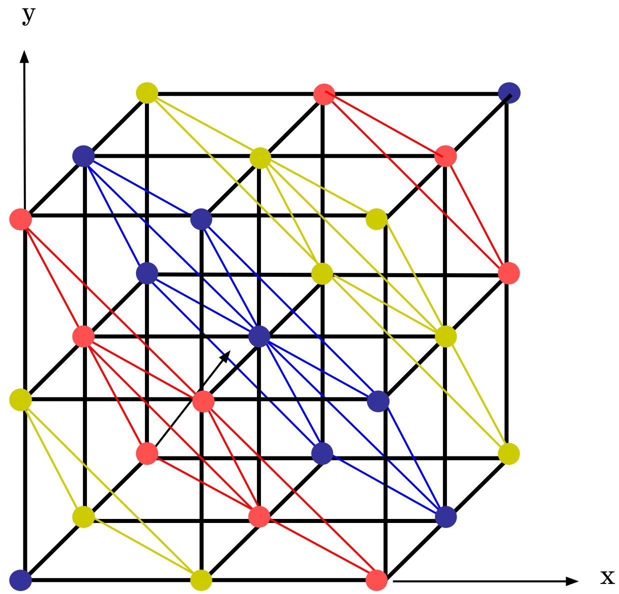
- 点集合に対して、どの点が一番近いかで平面上の点を分割。多角形による平面分割（ボロノイ分割）ができる。
- 点集合が繰り返し構造を持っていれば、有限種類のタイルによるタイリングができる。
- ３次元で行うと，多面体による空間分割になる。

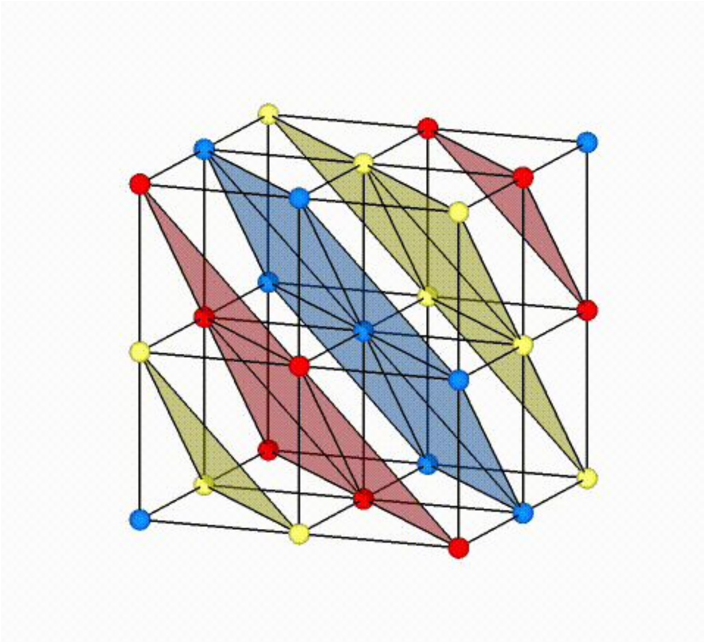
立方格子のボロノイ図形は？



立方格子

二つの立方格子の和では？





- 立方格子と、その　x = y = zの回りの 60 度回転の立方格子の和。
- ボロノイ図形を作る。
- H と T による空間充填となる。

どうやって
これを思いついたの？

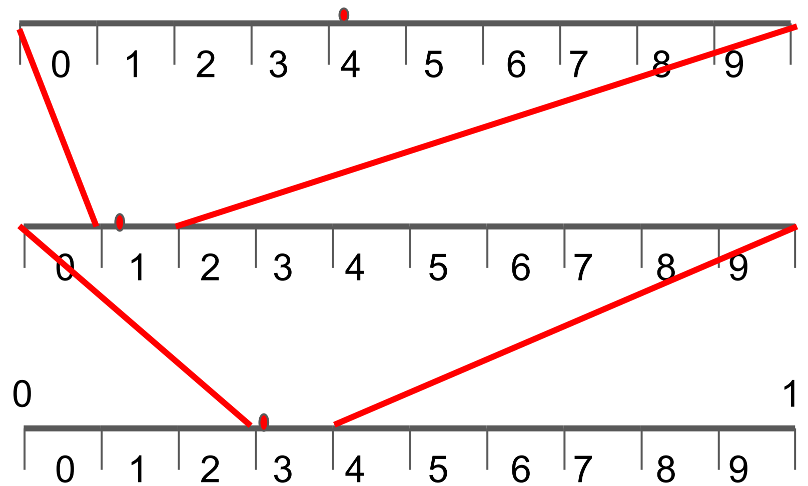
シェルピンスキー四面体というフラクタルの一般化

実数のコード

- 私の興味の中心：実数など，連続な空間上での計算

10 進展開

0.314...

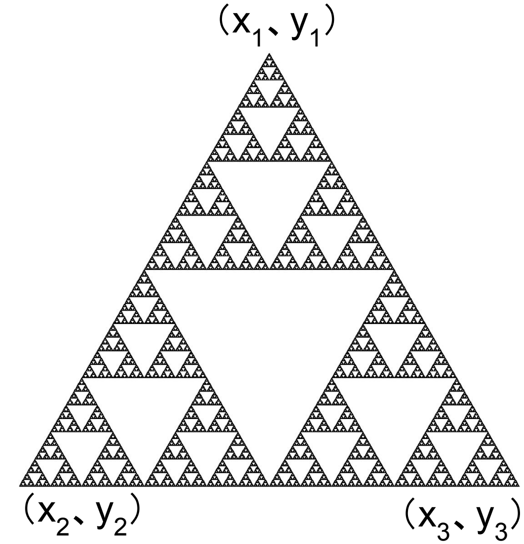


- フラクタル：拡大しても拡大しても同じような構造
- 私のアプローチ：グレイコードという実数のコード(略)。

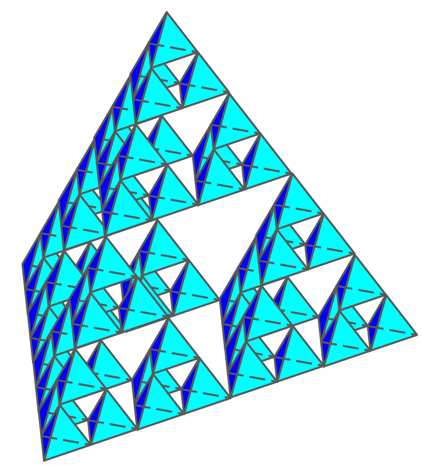
シェルピンスキー・ガスケット

- 自己相似(フラクタル)図形
- 再帰的手続きを教える教材(プログラミング)

```
void sier(Graphics g, int x1, int y1, int x2, int y2, int x3, int y3, int n){
    if(n == 0){
        g.fillPolygon(new int[]{x1,x2,x3}, new int[]{y1,y2,y3}, 3);
    }else{
        sier(g, x1, y1, (x1+x2)/2, (y1+y2)/2, (x1+x3)/2, (y1+y3)/2, n-1);
        sier(g, x2, y2, (x2+x3)/2, (y2+y3)/2, (x2+x1)/2, (y2+y1)/2, n-1);
        sier(g, x3, y3, (x3+x1)/2, (y3+y1)/2, (x3+x2)/2, (y3+y2)/2, n-1);
    }
}
```



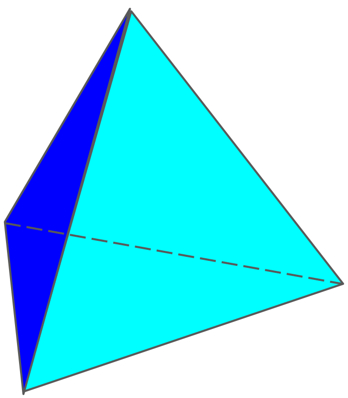
シェルピンスキー四面体



- シェルピンスキーガスケットの3次元版
- 再帰的手続きを教えるのに，この工作をしたら？

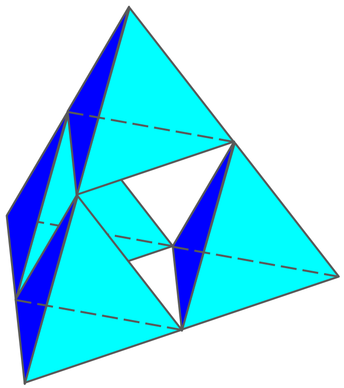
シェルピンスキー四面体

正四面体



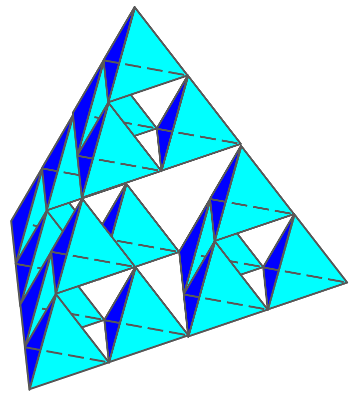
S_0

S_0を4つの頂点を中心に1/2に縮小して合わせたもの



S_1

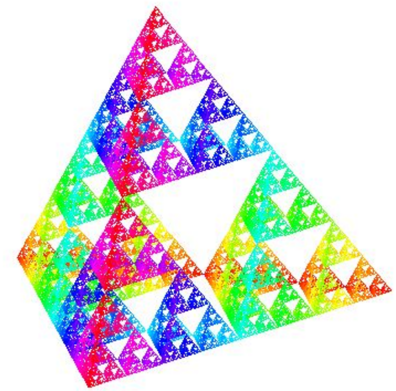
S_1を4つの頂点を中心に1/2に縮小して合わせたもの



S_2

....

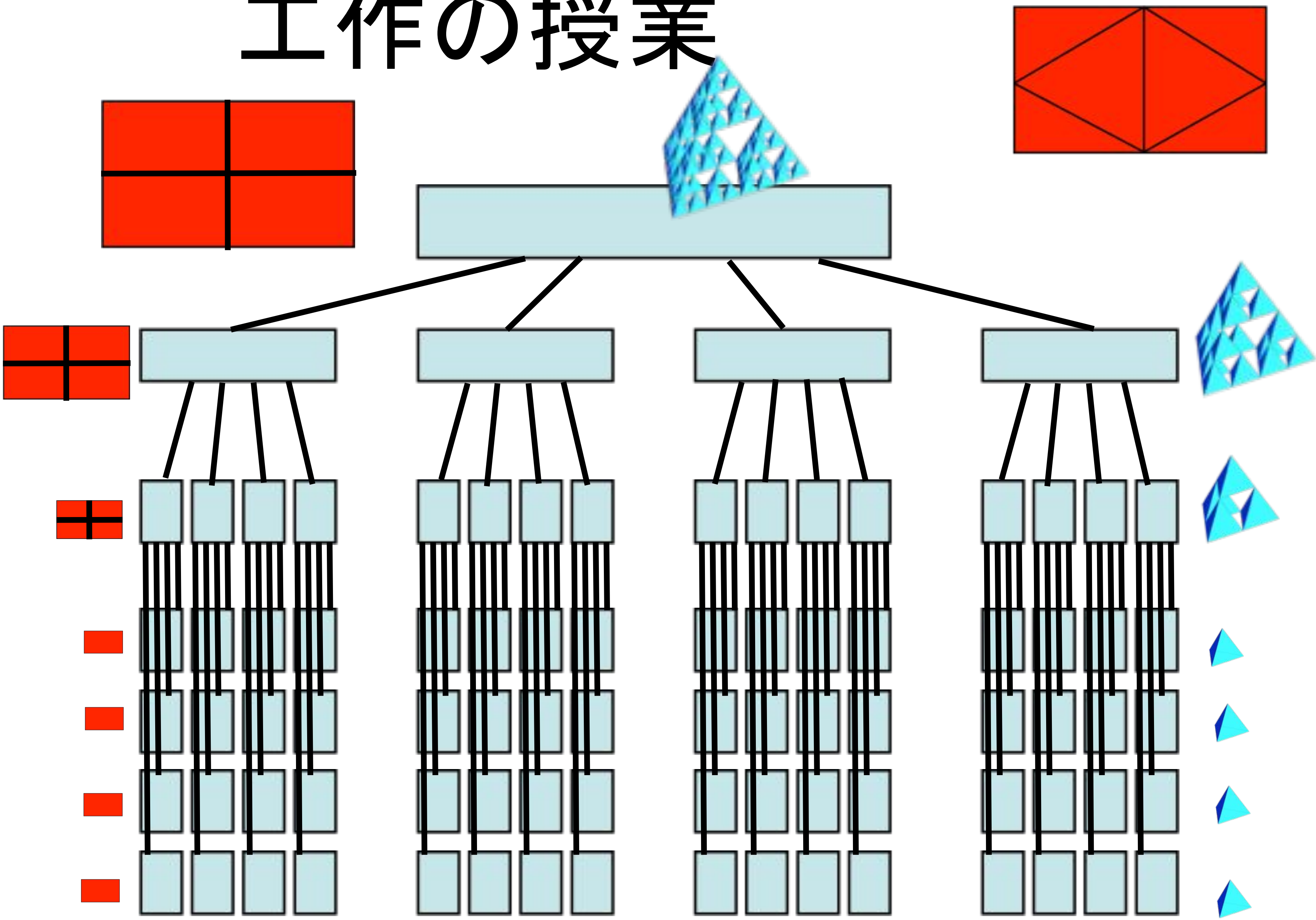
極限：
シェルピンスキー四面体



極限とは？

これは減少列なので，$\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$

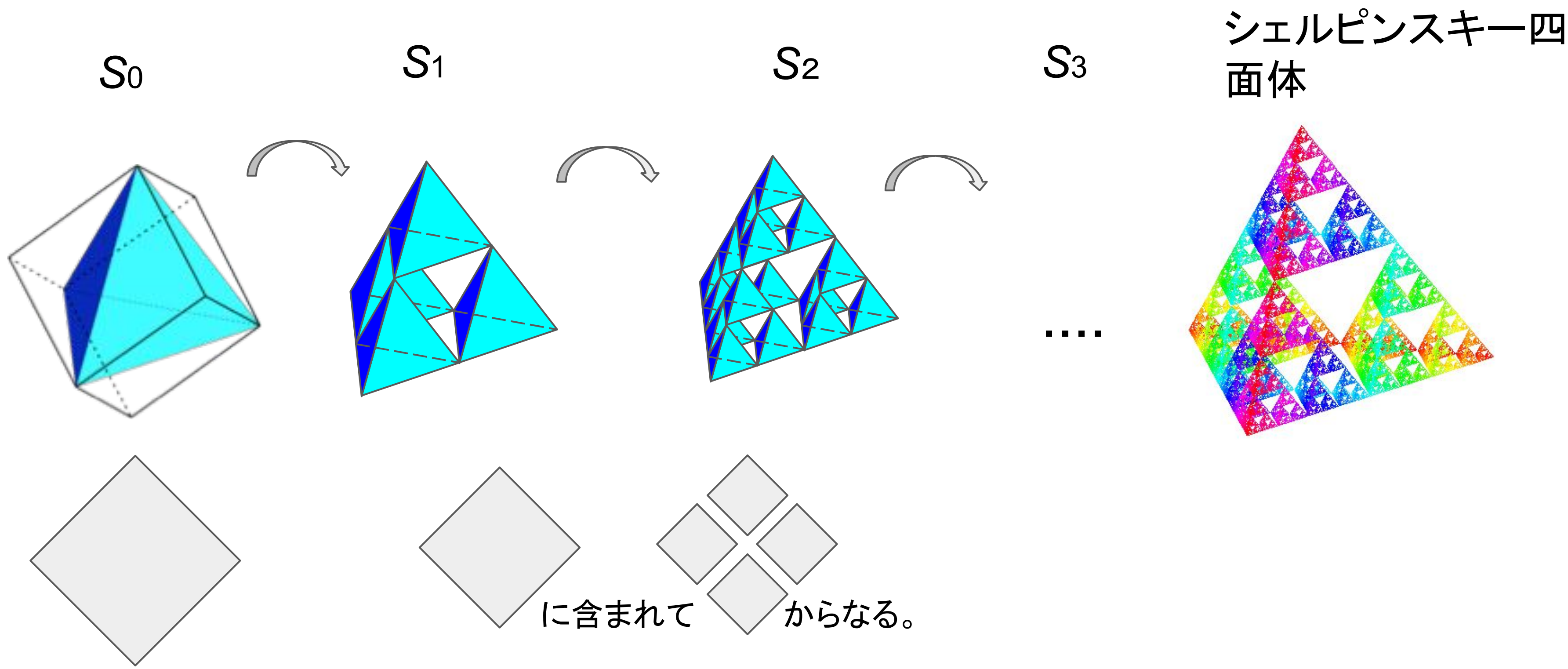
工作の授業



影の穴がピタッとふさがって正方形
になった瞬間、感動の波が広がった？

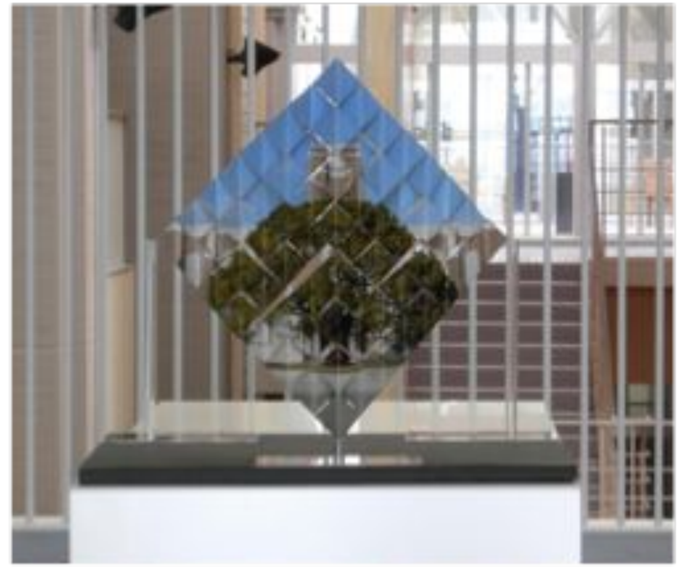
辺から正方形に見える
(＝イマジナリーキューブである)こと

- 全ての i に対し，Si はイマジナリーキューブであることは，数学的帰納法で証明できる。



- シェルピンスキー四面体がイマジナリーキューブであることは，ちょっと難しい。(大学レベルの数学)

Fractal University KYOTO



京都大学総合博物館にて展示
(2005より)

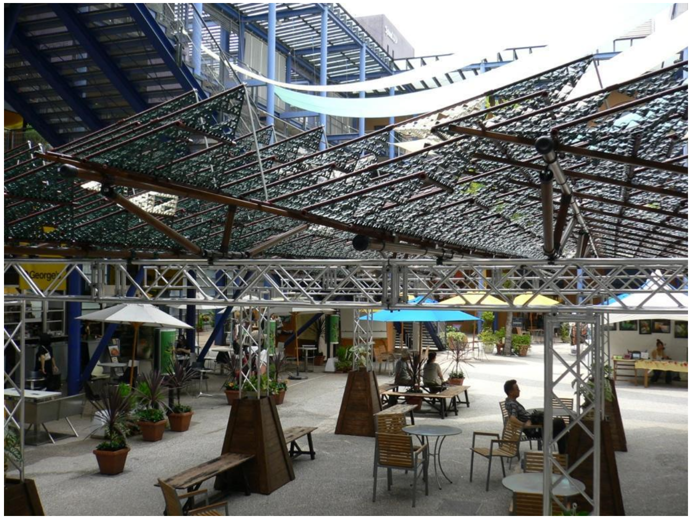
長い間、ロビーに置いてもらえた。
子供達の興味をひくことができた。

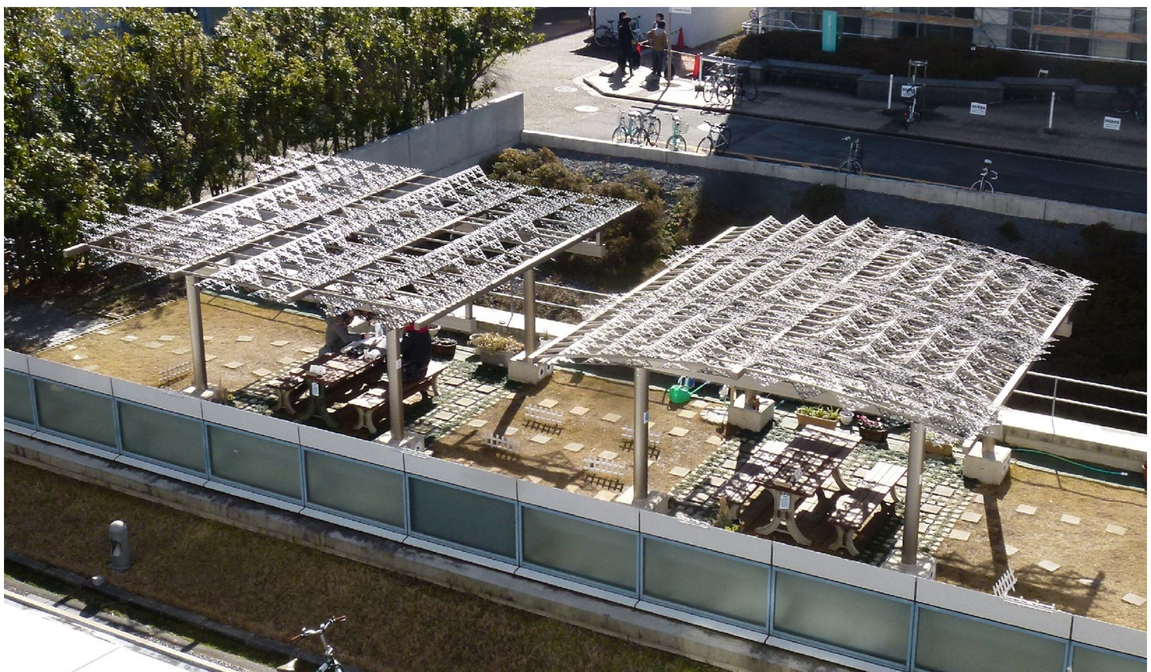
京大グッズ

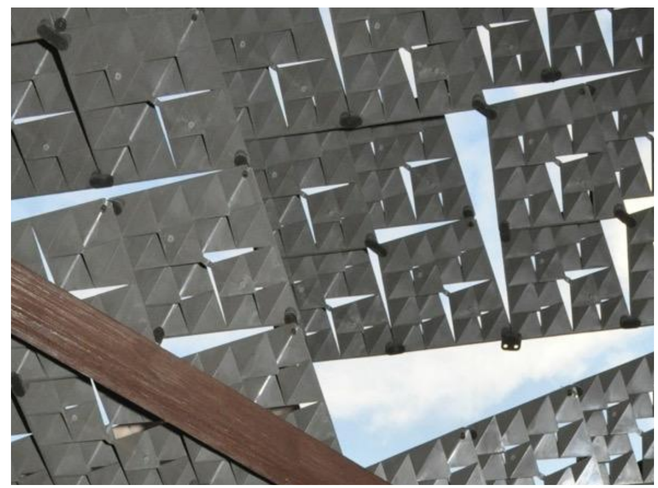
Imaginary
Cube パズル
シェルピンスキー四面体 編
京都大学大学院人間・環境学研究科准教授
立木 秀樹 作・解説
四角に見えますか？
立方体と同じように、3方向から見て正方形に見える立体、Imaginary Cube。見るからに「すかすか」だけれど、ある方向から見れば、時計台の写真や京大のロゴマークが浮かび上がる、そんな不思議なオブジェを作ってみよう!
京都大学学術出版会

フラクタル日除け

（酒井 敏　人間・環境学研究科教授）







シェルピンスキー四面体を用いた教育のまとめ

- 再帰的構造は重要。

- 立体を用いて，手を動かしながら理解できる。
- 立体図形の性質（立方体と正四面体との関係）。
- 驚きがある。
- 数学的帰納法を、級数を用いずに教えられる。
- フラクタル日除け。

私としては、大学の先生がこんなことで楽しんでいていいのかという気持ちを持っていた。

一般への拡張

シェルピンスキー四面体と同じような立体は他に存在しないのか？

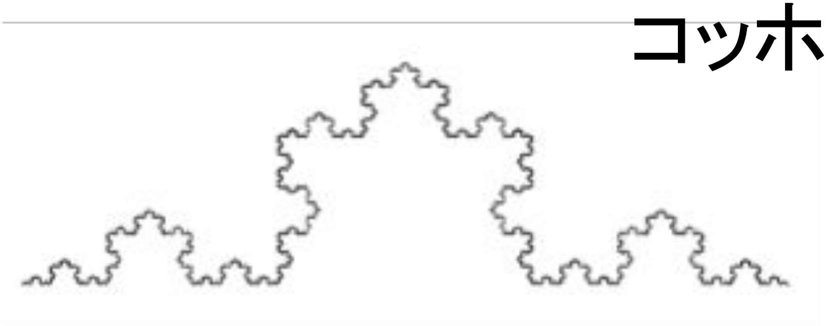
フラクタル

(C) Google Map

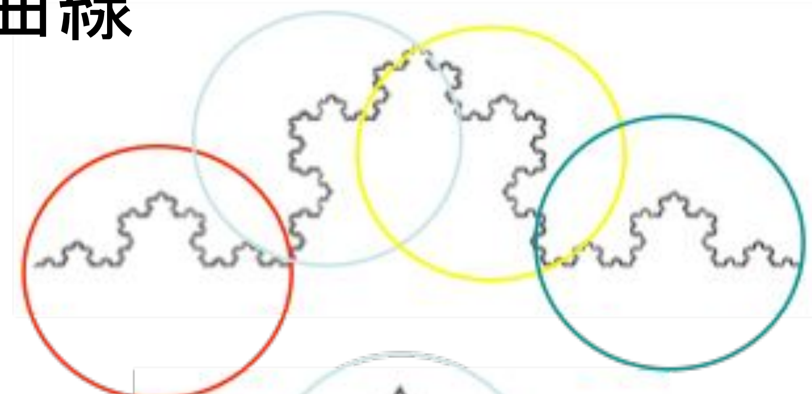
部分を取り出してみても，全体と同じ構造をしている

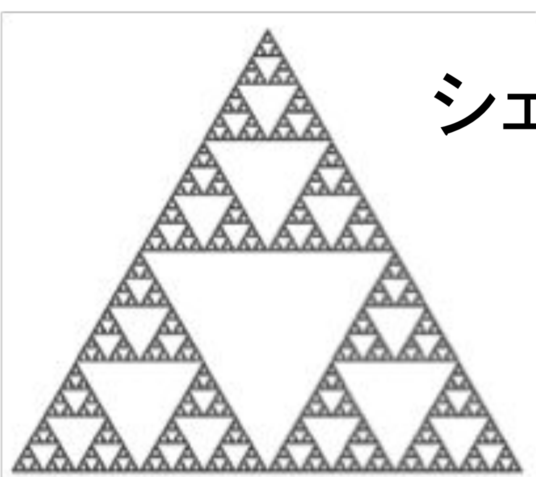
自己相似図形

自分自身を相似縮小したものをいくつか合わせたら自分にもどる。

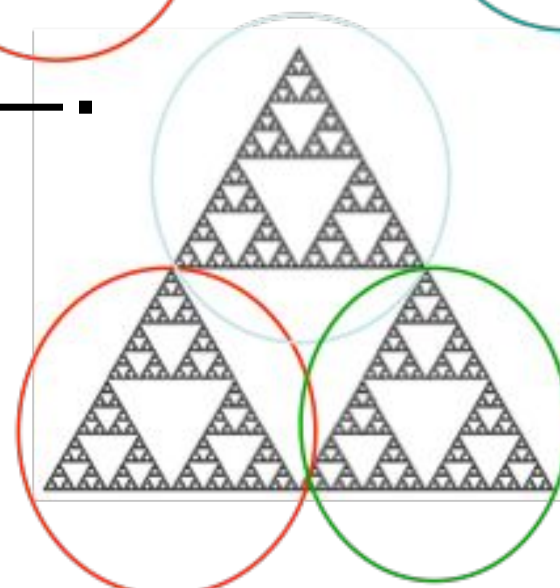


コッホ曲線

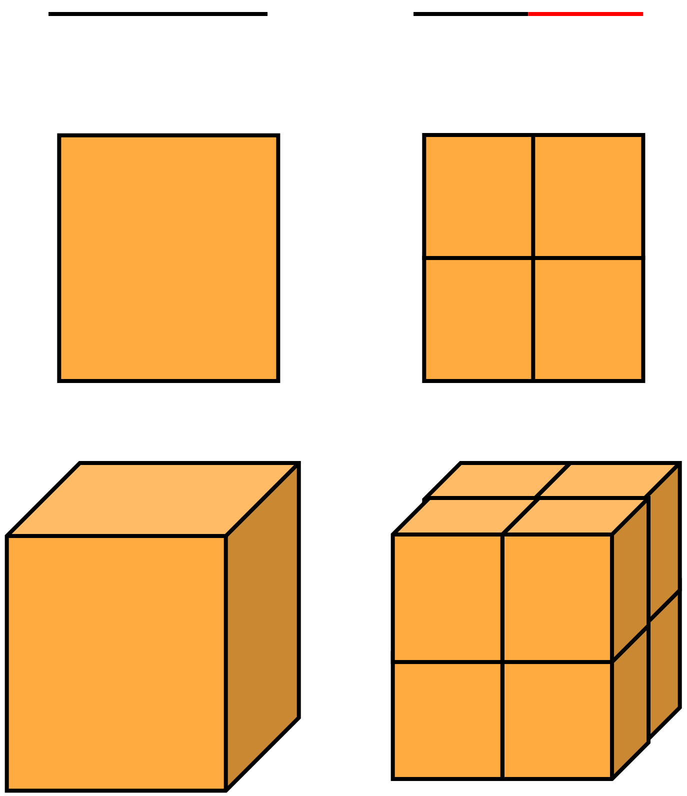




シェルピンスキー・ガスケット



次元

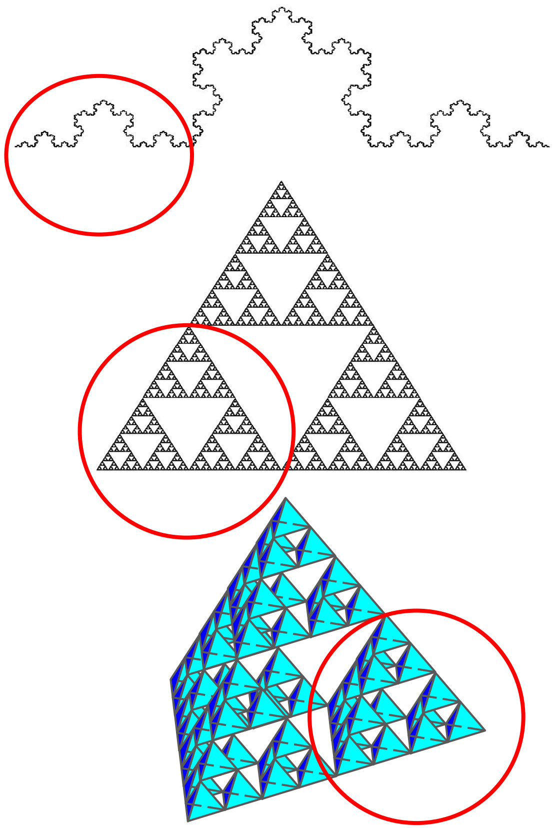


- 1次元：½倍にしたもの２個で元に戻る.。
- 2次元：½倍にしたもの4個で元に戻る。
- 3次元：½倍にしたもの8個で元に戻る。

- ½倍にしたもの2^n個で元に戻るとき，n次元
- 1/k倍にしたものk^n個で元に戻るとき，n次元

自己相似図形の次元

- 1/k倍にしたものk^n個で元に戻るとき，n次元。



コッホ曲線:
1/3倍にしたもの4個で元に戻る。
$\log_3 4(=1.26)$次元

シェルピンスキーガスケット:
½倍にしたもの3個で元に戻る。
$\log_2 3(=1.58)$次元

シェルピンスキー四面体:
½倍にしたもの4個で元に戻る。
$\log_2 4(=2)$次元

正方形に射影されるためには，２次元以上必要。

シェルピンスキー四面体
一般化

- 回転を含まない縮小写像によるフラクタル立体。
- 相似次元が２　(1/2 縮小４個)

  (1/k 縮小 k^n 個)
- イマジナリーキューブ（直交する3方向への射影で正方形になる。）

自己相似図形(の近似)の描き方

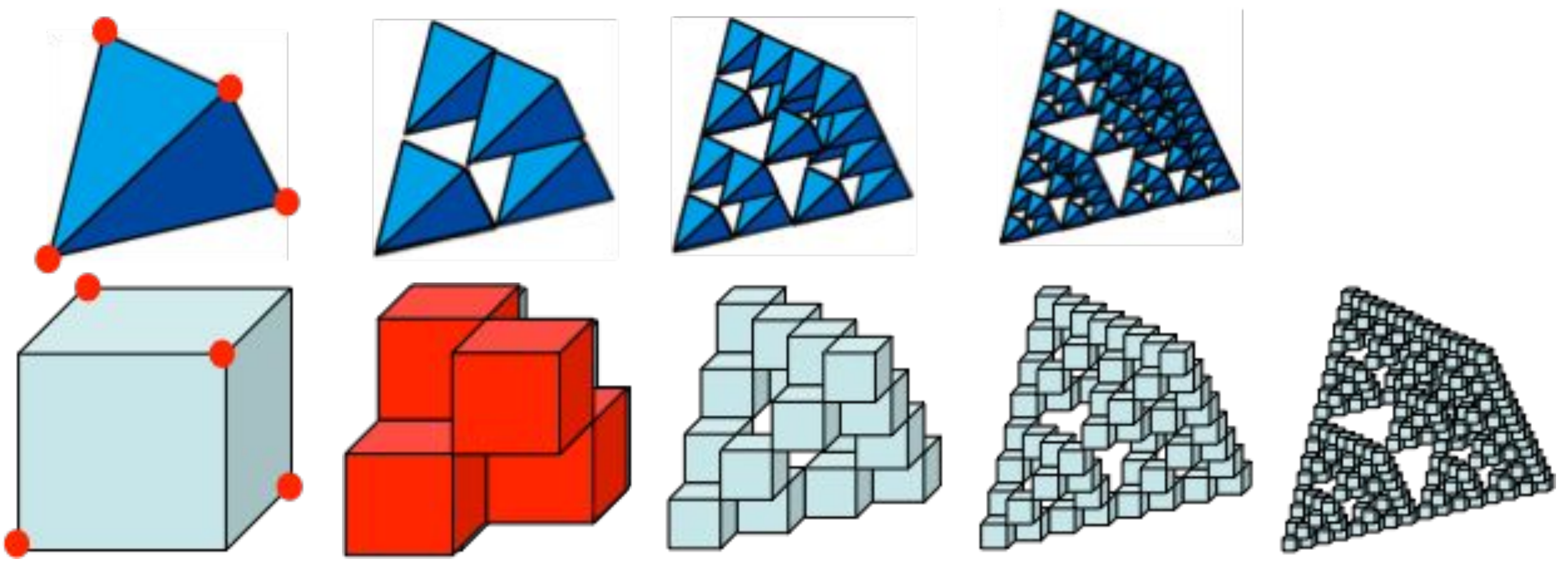
フラクタルは、最初の図形によらず、
縮小写像だけによって決まる。

正四面体ではなく立方体から始める。

- フラクタルは，縮小の中心点と縮小率 だけで決まり，どの形から始めるかすに依存しない。

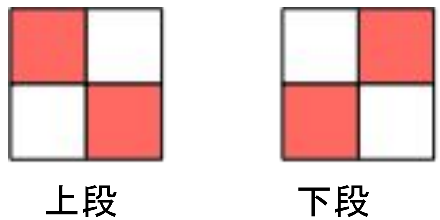
- 3つの射影から定まる、立方体から始める。

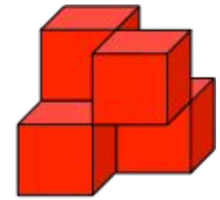
シェルピンスキー四面体の時



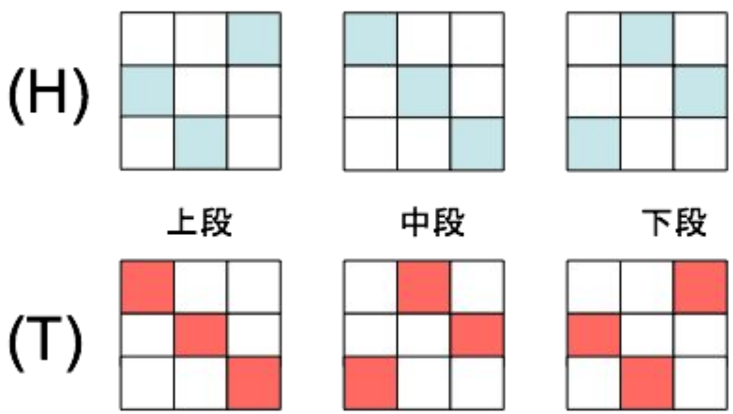
- イマジナリーキューブになるには，1段目の近似がイマジナリーキューブになっていることが必要十分。

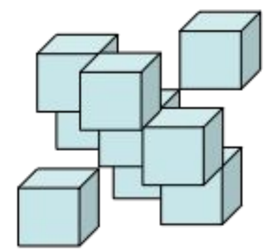
- k=2: この１通り（シェルピンスキー四面体）

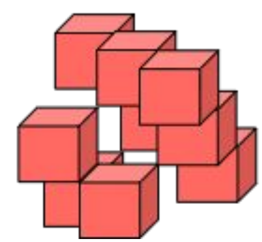




- k=3: ２通り存在



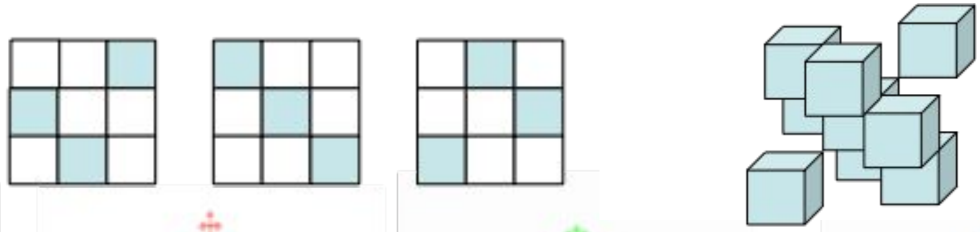


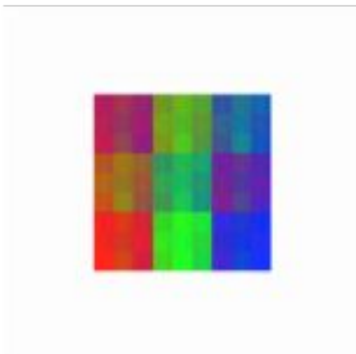


どんなフラクタル？
いろんな方向から見た絵をコンピュータで描いてみる

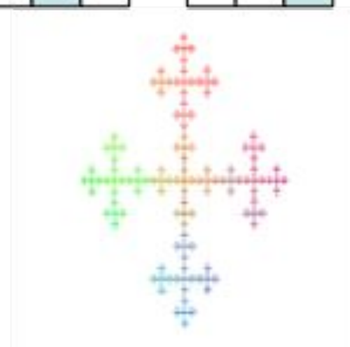
(H) が生成するフラクタル

(H)

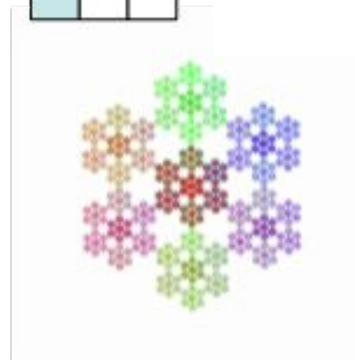




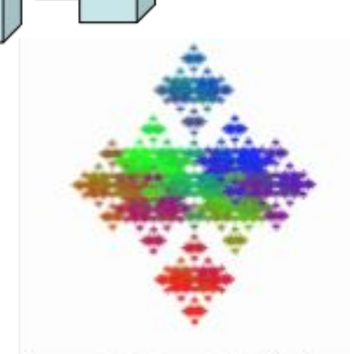
Square（6）



Dendrite #1（3）



Snowflake #1（1）



Tiling #1（6）

Dendrite #2（3）

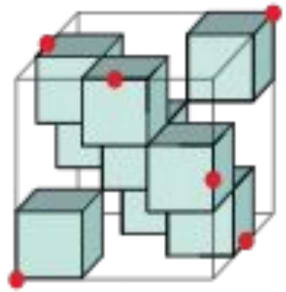
Snowflake #2（6）

Tiling #2（6）

方向により，多様な見え方をする。
正方形に見えるのは6方向。どんな立体？

凸胞をとってみる

凸胞：くぼみをなくした立体。
この場合，縮小写像の中心（下図赤点）を頂点とした多面体。

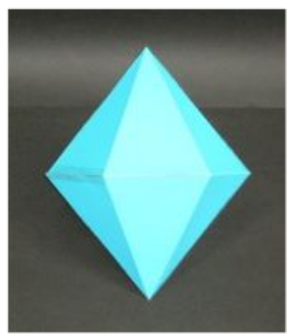


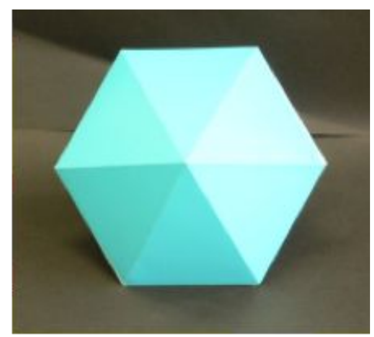
H_1

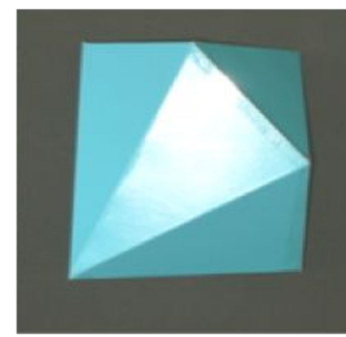
2次近似：

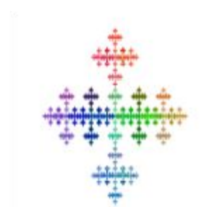
H_2

(H)のフラクタルの
凸包は、H

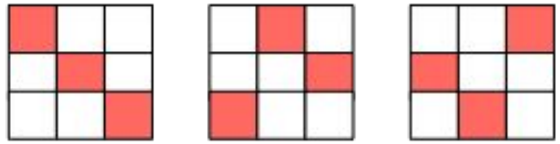


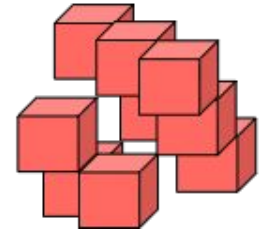


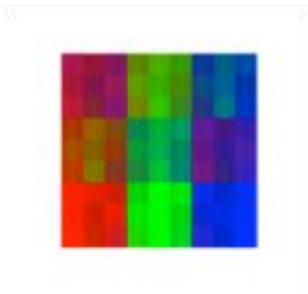




(T) が生成するフラクタル

(T) 

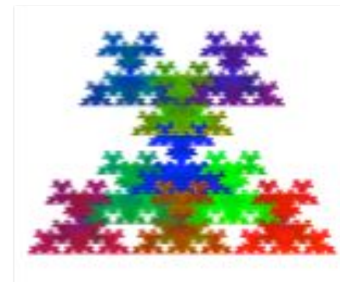




Square (3)

Cantor Set #1 (3)

Triangle (1)



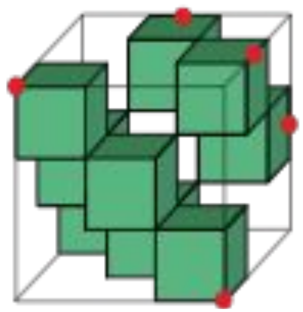
Tiling #1(3)

Cantor Set #2 (3)

Tiling #2(3)

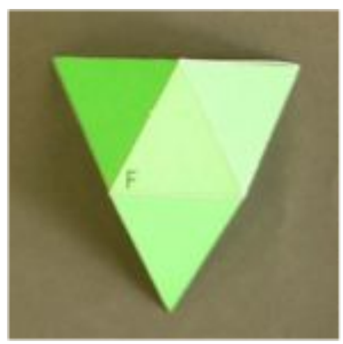
連結でもない，さらに不思議な形。
どんな立体？

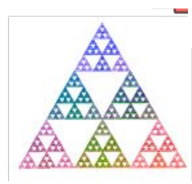
凸胞をとってみる

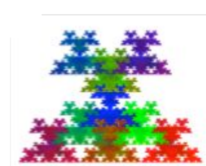


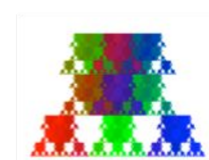
2次近似:

(T)のフラクタルの
凸包は、T

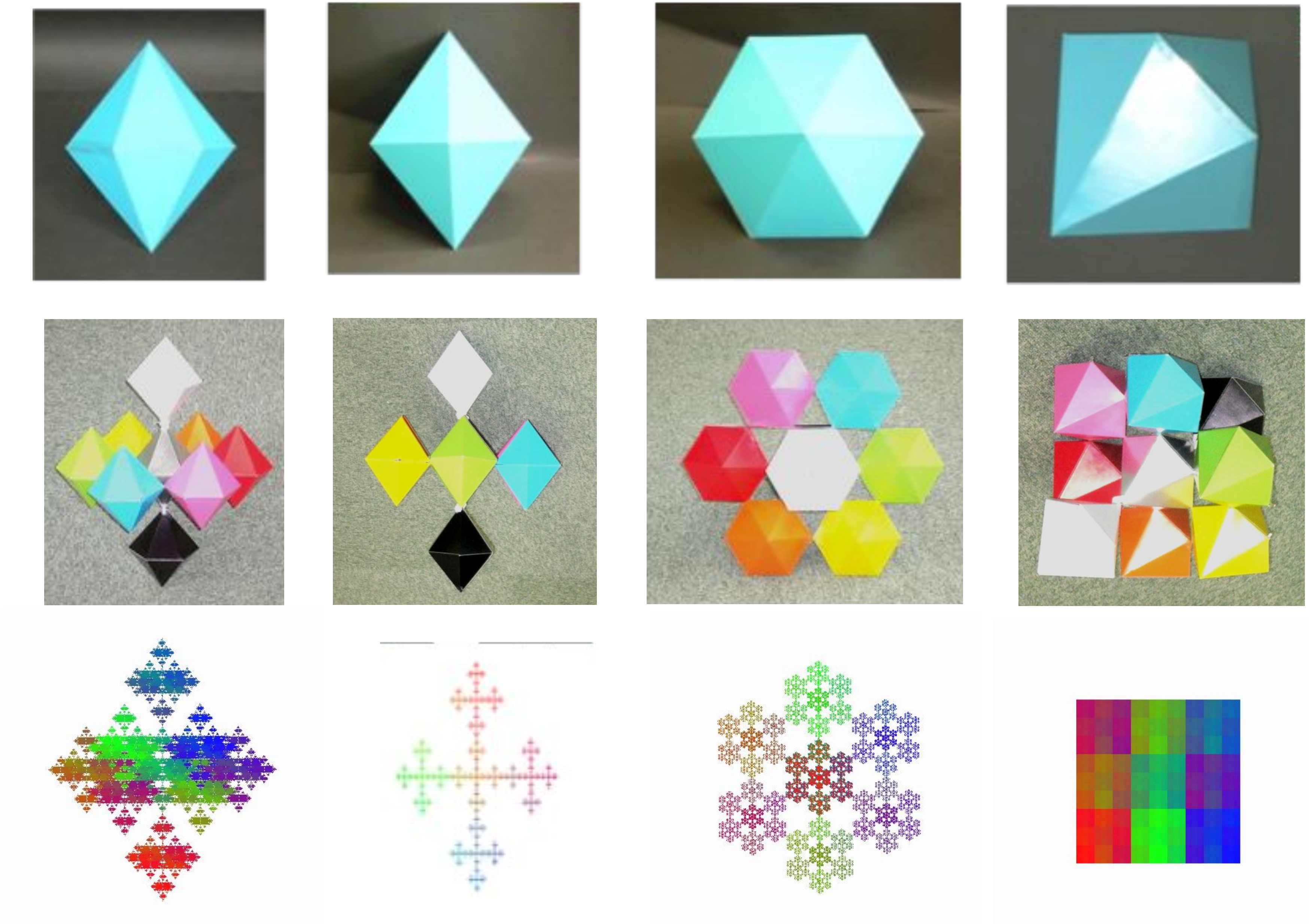




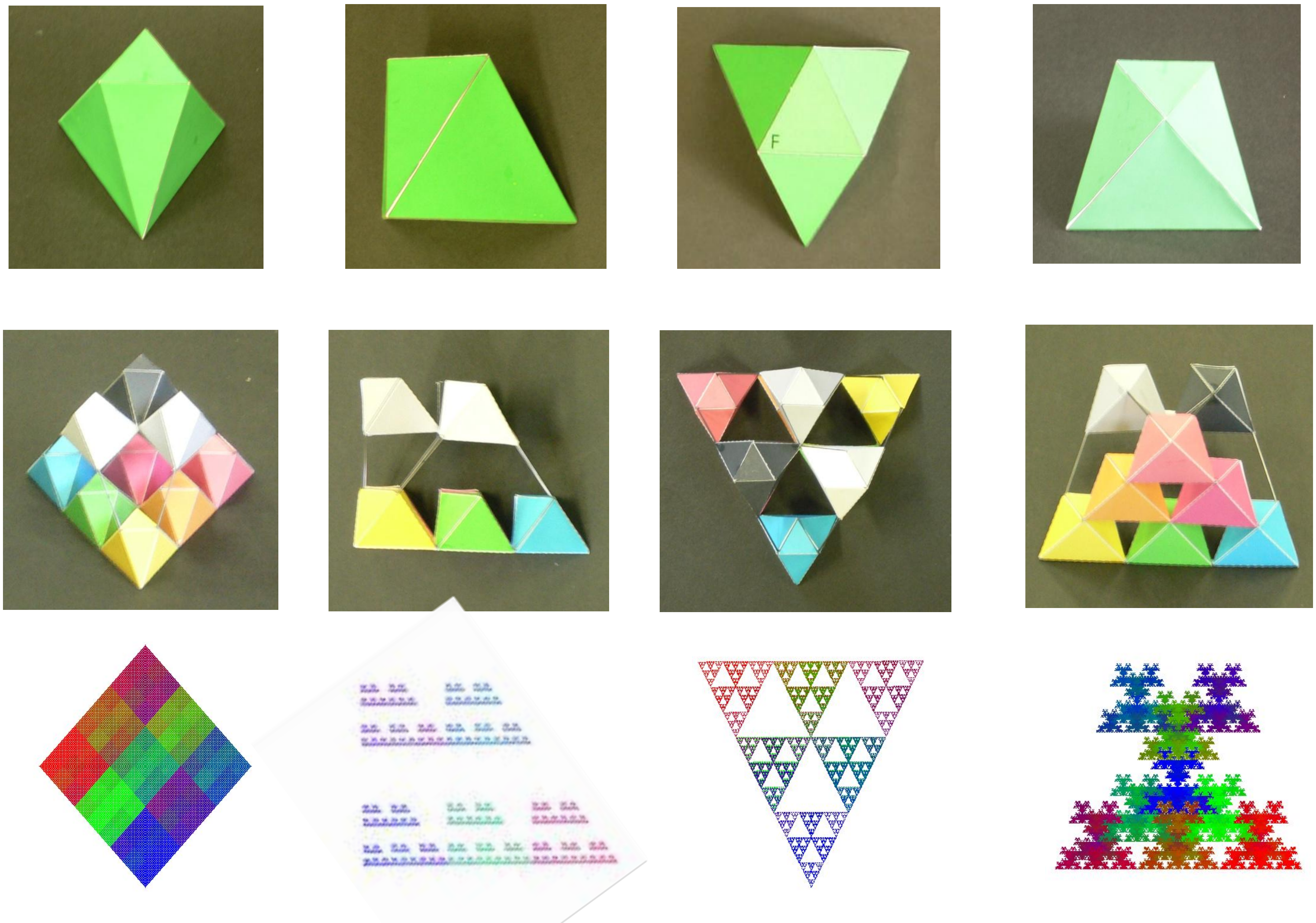




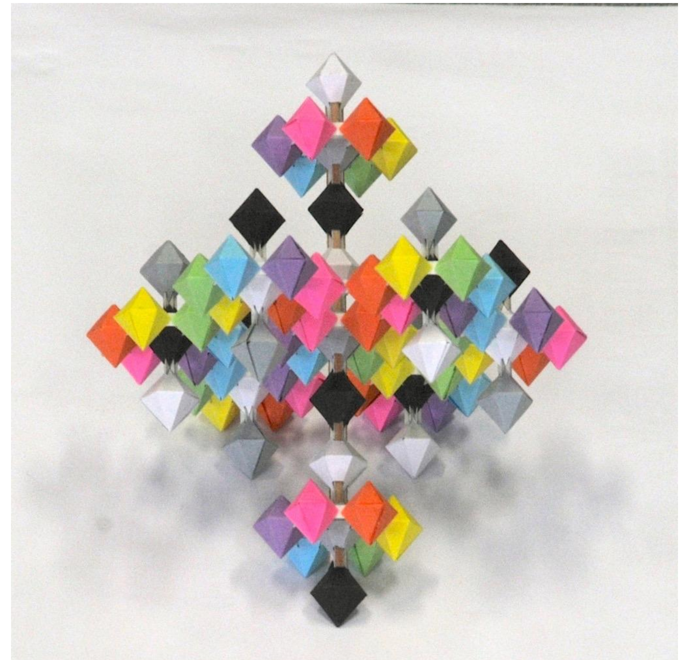
H フラクタルの１次近似

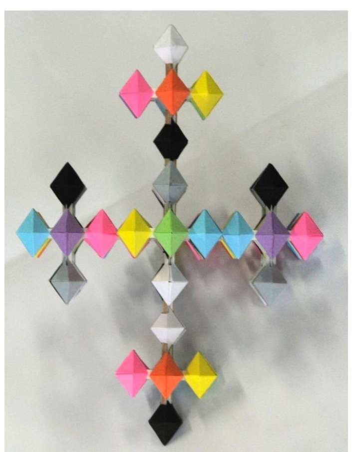


Ｔフラクタルの１次近似



H フラクタルの2次近似

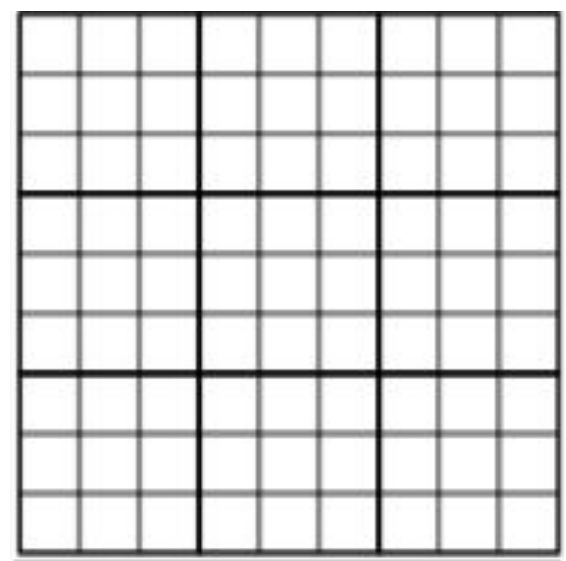




ポータブル版制作：塚本靖之氏

数独フラクタルオブジェ

- 正方形に見えるどの方向でも，すべての列，行，ブロックにすべての色が含まれるように9色で色付け。
- 数独的色づけは、30個（回転で一致するものを別個に数えれば140個）ある。このオブジェの色づけは，対称性の高いもの。
- コンピュータで見つけ、手で証明した。



H

と

T

がぴったり
合う！！

⇒ 空間充填

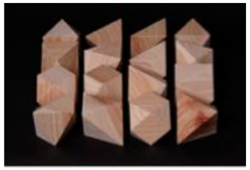
⇒ パズル

イマジナリーキューブ

極小凸I.C.によるオブジェ

四次元への拡張
(極小凸I.C.
フラクタル,
数独)

位相空間



極小凸イマジナリーキューブの数え上げ

16胞体空間充填との関係

不動点定理

グレイコード

実数計算
プログラム理論
ドメイン理論
論理

フラクタル

シェルピンスキー四面体

ＨとＴのフラクタル

ＨとＴの空間充填

パズル

教育

数独フラクタルオブジェ

立体の幾何

パズル・ゲームの数理

多面体

対称性

数え上げ

タイリング

群論

数学教育

四次元幾何

Zomeツール

AR
(拡張現実感)