形の科学会誌,第 22 巻第 3 号, pp.256-265,　 修正 2011.6

切頂六百胞体の見方

立 木 秀 樹
京都大学大学院　人間・環境学研究科
tsuiki@i.h.kyoto-u.ac.jp

Studying Truncated 600 Cell through 3D projection

Hideki Tsuiki
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

Abstract: On January 6, 2008, a three-dimensional projection model of the truncated 600 cell was constructed with the Zometool, in a workshop leaded by Professor George Hart. In this article, we explain the structure of the truncated 600-cell through the investigation of this model.
キーワード：切頂六百胞体，正六百胞体，4 次元立体，射影，ゾムツール

1. はじめに

2007 年 12 月 30 日から 2 週間，N.Y.ストーニ・ブルック大学のジョージ・ハート教授が日本学術振興会の招きで京都大学に滞在された。ハート教授は，数学者，計算機科学者であると同時に，幾何学的な考えに基づいた彫刻作品を制作する芸術家でもある。そして，ゾムツールなどを用いた，幾何学と造形を題材にしたワークショップを数多く行い，数学に基づく造形の価値を一般に広める活動を数多く行っておられる。今回の招聘も，ワークショップを開催して頂き，数学的な彫刻やそれに関連した幾何的な話に多くの人々が接する機会を設

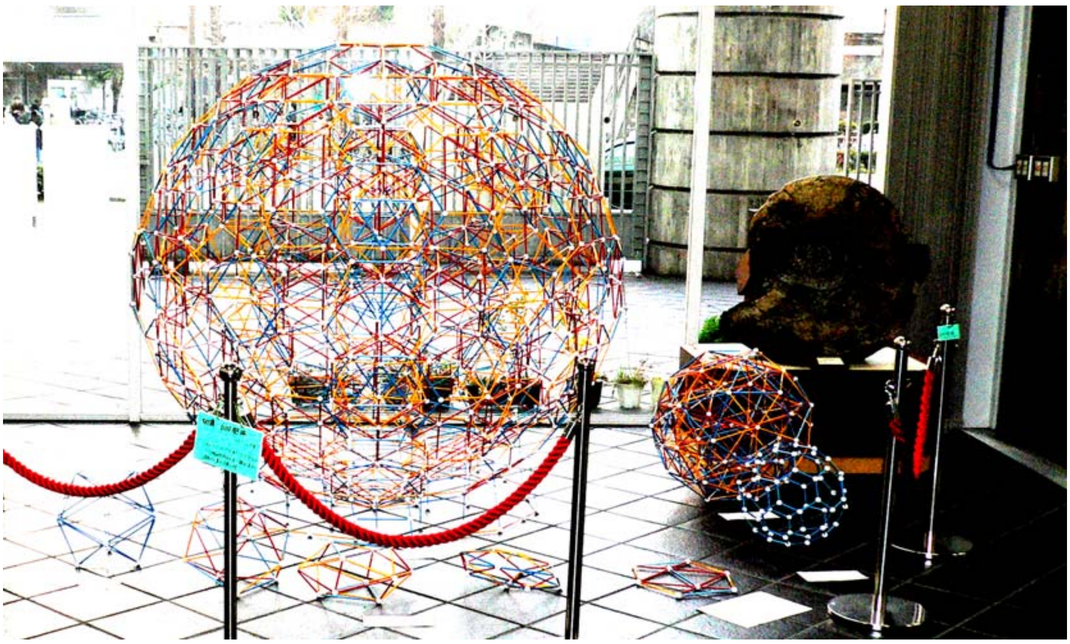


図 1: 京都大学総合博物館に展示されている，切頂六百胞体オブジェと正六百胞体オブジェ。

け，日本国内で数学的な造形に関する裾野を広げることを目的の一つとしていた。そして，1 月 6 日に京都大学総合博物館にて 2 つのワークショップを行った。午前のワークショップはゾムツールを用いて切頂六百胞体の 3 次元射影を作成するものであり，午後のワークショップは，正二十面体や切頂二十面体の正確な絵を描いた後に CD 150 枚をケーブルタイでつなげて切頂二十面体（サッカーボールの形）のオブジェを造るというものである。

このワークショップで製作された切頂六百胞体オブジェは，正六百胞体オブジェと共に，その後も京都大学総合博物館のロビーに展示されている。3600 個のプラスチックの部品を組み合わせてできた直径約 1.9 メートルの球状のオブジェであり，その迫力と美しさで訪れた人を魅惑している。この立体オブジェには，数学的なことを考えずに見ていても飽きない面白さがある。しかし，それだけではもったいない。ぜひとも，数学的な目で眺めて，複雑な中にある対称性に気づき，4 次元立体である切頂六百胞体を想像して楽しんで頂きたいと考えている。本稿では，この 3 次元射影から分かる切頂六百胞体の構造について解説する。

2. ゾムツール

はじめに，ゾムツールについて簡単に説明しておきたい。ゾムツールは，穴のあいた頂点ノードに棒（ストラット）を突き刺すことにより立体模型を作っていく組み立て玩具である。単なる玩具ではなく，数学的思考に基づき様々な幾何学的な立体を簡単に作ることができる，立体幾何を考えるための有効な道具である。

頂点ノードは，図 2 のようにほぼ斜方二十・十二面体の形をしている。違いは，斜方二十・十二面体が 12 個の正五角形と 20 個の正三角形と 30 個の正方形の面をもっているのに対し，正方形の面が長方形になっている点である。そして，頂点ノードの各面には，それぞれの形に合わせて五角形，三角形，長方形の穴があけられており，対応する断面の形をした棒を頂点ノードに挿せるようになっている。棒は，赤（五角形），黄（三角形），青（長方形）の色をしており，それぞれ，黄金比の比をなす 3 種類の長さが存在する[1]。各面に対し，その裏側にも同じ形の面があるが，五角形と三角形の面は裏側で向きが逆になる。それに合わせて，赤と黄の棒は途中でねじれている。これにより，棒の両端にある頂点ノードは全く同じ向きを向くことになり，連結な立体を作る限りどの頂点ノードも同じ向きを向くことになる。このことは，ゾムツールの仕組みを考える上で重要である。

ゾムツールで作成可能な立体について考えるには，斜方二十・十二面体についての理解が

図 2 : ゾムツールの頂点ノード。

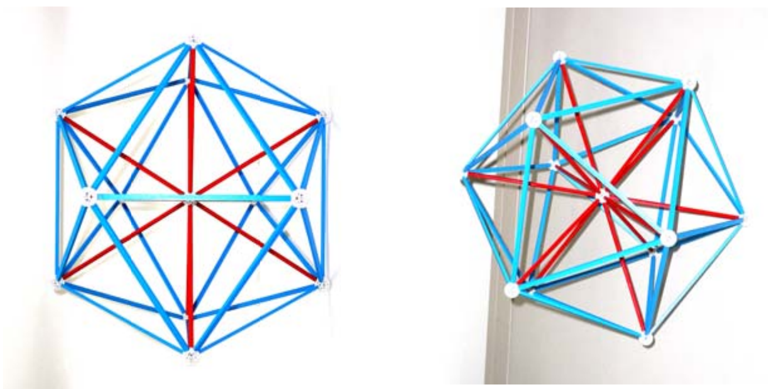


図 3 : ゾムツールで作成した正二十面体と, 頂点と中心をと結ぶ辺。

[1] それ以外に緑の棒も存在するが，それについては省略する。

重要である。頂点ノードの 12 個の五角形の穴は正二十面体の頂点の方向を向いており，20 個の三角形の穴は正十二面体の頂点の方向を向いている。そして，30 個の長方形の穴は，正十二面体および正二十面体の辺の方向を向いている。図 2 のように長方形の穴を正面に据えて頂点ノードを見るとゾムツールの性質がよく分かる。まず，図 2 の上下左右にも長方形の穴が存在する。このように，30 個の長方形の穴は，6 個ずつが 3 次元の座標軸のようにお互いに直交した方向を向いている。このことから，青色の棒を用いて立方体を組めることが分かる。また，図 2 で，長方形の穴の左右には五角形の穴，上下には三角形の穴がある。よって，この 2 つの五角形の穴を結ぶ方向と，左右にある長方形の穴を結ぶ方向は一致している。このことから，12 個の五角形の穴に赤い棒をつなげ，その先に頂点ノードをつなげると，隣り合う頂点ノードを結ぶ方向に長方形の穴があくことになる。赤と青の棒の長さは，この穴の間に青の棒が入るように設計されている。このことから，ゾムツールで正二十面体を作れることが分かる（図 3)。黄の棒と青の棒の関係も同じで，一つ短い青の棒と組み合わせることにより，正十二面体を作ることができる。これにより，青，赤，黄の棒の長さの基本比が定まる[2]。斜方二十・十二面体は，正二十面体と同じ H_3 という対称性を持っている。この対称性の対称面は正二十面体の頂点，面，辺上で交わり，それぞれ，5 回，3 回，2 回の回転対称軸をなす。この 3 種類の方向が，ちょうど，この斜方二十・十二面体の五角形，三角形，長方形の面の方向である。ゾムツールで幾何学的立体を作成するときには，対称的に同じ操作の繰り返しを行うことが多い。その対称群は，H_3 かその部分群となるのが普通である。

3. 多胞体

2 次元や 3 次元の概念は，絵を描いたり模型を作ったりして実現できるが，4 次元ユークリッド空間の立体をこの 3 次元空間内に実現することは不可能であり，4 次元立体は線形代数を用いて抽象的に定義するしかない。ここでは，多胞体についてきっちりとした説明を行うのが目的ではないので，できるだけそのような言葉を用いずに説明したい。詳しくは，[1][2]などを参照されたい。

2 次元空間内の直線，3 次元空間内の平面と同様な 4 次元空間内の 3 次元部分のことを，超平面という[3]。そして，3 次元空間内で平面に囲まれた立体を多面体というのと同様に，4 次元空間内で超平面に囲まれた立体のことを（4 次元）多胞体という。多面体が多角形の面に囲まれているように，多胞体は多面体に囲まれている。これらの多面体のことを，多胞体の胞という。多面体に頂点，辺，面があるのと同じように，多胞体には，頂点，辺，面，胞がある。

2 次元の正多角形，3 次元の正多面体に対応する多胞体を正多胞体という。正多面体は，すべての面が同じ正多角形をしており，全ての頂点，辺の中点，面の中心が，ある点（多面体の中心）から等距離にある。それと同様に，正多胞体の全ての胞は同じ正多面体であり，頂点，辺の中心，面の中心，胞の中心がある点（正多胞体の中心）から等距離にある。

よく知られているように，正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類しかない。それに対して，正多胞体も正五胞体，正八胞体，正十六胞体，

[2] 青の棒の長さに対し，赤の棒は cos 18° を，黄の棒は cos 30° を掛けた長さである。そのそれぞれに対し，黄金比，および，黄金比の 2 乗を掛けた長さの同じ色の棒が存在する。短いほうから，青 1，青 2，青 3，赤 1，…と呼ぶことにする。

[3] 正確には，あるベクトルとの内積の値が一定である点集合として定義する。

正二十四胞体，正百二十胞体，正六百胞体の 6 種類しかない。ここでは，正六百胞体の正確な定義をして，博物館に展示されているゾムツールによる正六百胞体と切頂六百胞体の 3 次元射影が正しいことを検証するのではなく，この射影が正しいことは信じていただくことにして，この射影を見て分かる正六百胞体と切頂六百胞体の構造について考えてゆく[4]。

4. 正二十面体の射影

4 次元立体について 3 次元射影を見ながら想像する方法は，1 つ次元を落として，3 次元立体と 2 次元射影の関係から類推できる。

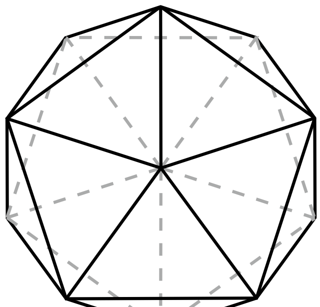


図 4：正二十面体の頂点からの射影

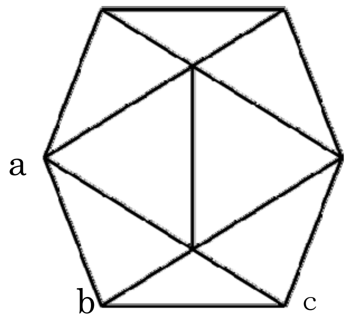


図 5：正二十面体の辺からの射影

正二十面体は，頂点が 12 個と正三角形の面が 20 個，そして，辺が 30 本ある正多面体である。この正二十面体を頂点の方から射影すると，図 4 のように，真ん中の 2 つの頂点が重なって頂点に対応する点が 11 個となり，手前側の 10 個の三角形と向こう側の 10 個の三角形がある絵となる。正二十面体の中心に座標の原点があり，射影の方向が z 座標になるように座標を入れて考える。射影上の点の位置は（x, y）という 2 次元の座標で指定できるが，対応する正二十面体の点は，これに z 座標が加わったものである。射影を見て 3 次元の立体を想像する時には，このもう 1 つの座標を加えて 3 次元にふくらませて考える必要がある。手前をプラスにすると，周辺の五角形をなす 5 つの頂点は z 座標がプラス，周辺のあと 5 つの頂点はマイナス，そして，真ん中は x 座標と y 座標が 0 であり，z 座標がプラスとマイナスの 2 つの頂点と正二十面体の中心が重なっている。

このように，全体の形を想像するには 3 次元にふくらませて考える必要があるが，表面のつながり方はそのまま見て取ることができる。正二十面体は，1 個の頂点に 5 個の辺と 5 個の正三角形が集まっている。この射影でも，手前の部分だけを見れば，真ん中の頂点の周りを 5 個の辺と 5 個の三角形がとり囲んでいる。ただし，正三角形 5 個で頂点の周りを 1 週するのは 3 次元では不可能で，そのため 3 次元の方向に曲がりが生じており，その分だけ射影に見える三角形はちょっとひしゃげた形をしている。その周りの 5 個の三角形はもっとひしゃげているが，頂点と頂点のつながり方は，正二十面体でもその射影でも変わらず，どの頂点も 5 個の辺と 5 個の三角形に囲まれている。

図 5 は，辺を中心として正二十面体を射影したものである。今度は，z 座標が 0 の平面を対称面として，z 座標がプラスの部分とマイナスの部分がぴったり重なっている。よって，周辺部以外では，頂点も辺も，手前側と向こう側の 2 つものが重なって 1 つに見えている。

[4] この立体の正しさを自分で検証したい人のために正六百胞体の頂点の座標をあげておく。(±2,0,0,0)の置換(8 種類), (±1,±1,±1,±1)（16 種類）, (±1,±φ,±1/φ,0) の偶置換(96 種類)である（φは黄金比)。3 次元射影は，座標軸方向から行う。

頂点は8個あるが，このうち，上下の4つ（頂点b， c）はz座標が0で正二十面体の1つの頂点に対応しており,残り4つの頂点は2重になっている。三角形の面は8個見えている。これらは，2つずつが重なっており，周辺部にいくほどひしゃげている。そして，残り4つの面は，z 座標方向に平行になり，1 次元下がって，左右に線分として見えている。各頂点の周りの状況を見ると，中心の2つの頂点の周りには5本の辺が集まっているが，左右の頂点（頂点 a）には4本の辺しか集まっていない。これは，5本目の辺が，自分自身と同じ位置にあるもう一つの頂点とつながっているからである。また，頂点bは3本しか辺が出ていないが，この頂点のz座標は0であり，2本は2つの線分が重なり，残り1本はz座標が0の別の頂点cとの間の1本の線分の射影だからである。

ちなみに，図5は，図3のゾムツールによる正二十面体と同じ向きをしている。図5において,上下の4つの頂点は黄金比長方形をなしており,真ん中の4つの頂点がつくる菱形も，同じ大きさの黄金比長方形の辺の中点を結んでできるものである。さらに，この平面図形は図7の右下のように，ゾムツールで作ることが出来る。

5.　正六百胞体の射影

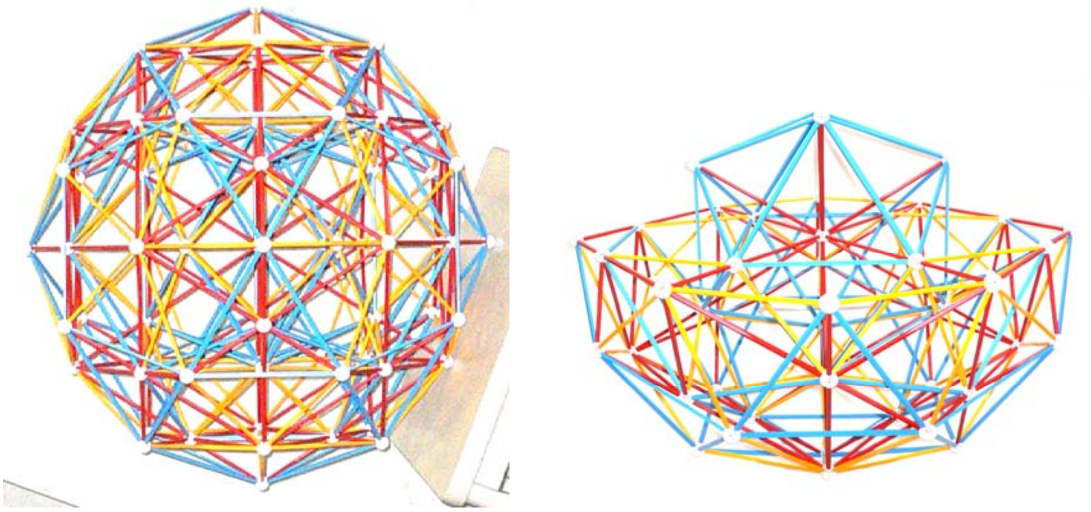


図6 ：正六百胞体の3次元射影（2回対称軸方向）とその中心部

この正二十面体の時の考察を念頭において，ゾムツールで作られた正六百胞体の3次元射影から正六百胞体を想像してみよう。この射影オブジェクトの中心を原点にして3次元座標系（x,y,,z）を導入して考える。正六百胞体は4次元空間にあるので，正六百胞体の各点はもう一つの座標（wと呼ぶことにする）を持っている。4次元六百胞体の中心から各頂点までの距離は同じである。よって，点の位置によってw座標の絶対値は一意に定まる。この射影において中心の近くにある頂点はw座標の絶対値が大きくて，中心から遠くなるほどw座標の絶対値は小さくなり，この立体を囲む球上ではw座標が0となる。この立体の真ん中に頂点があるが，この点は，x, y, z座標が0で正六百胞体の中心と同じであり，w 座標だけがプラス（あるいはマイナス）の頂点である。つまり，この立体が，頂点方向からの射影であることが分かる。

この射影の各頂点は，正六百胞体の1つか2つの頂点と対応している。真ん中の頂点は12

本の赤い辺が出ており，その先の頂点が正二十面体をなしている。図 6 右は，中心部が見えるように上部の一部を取り外したものである。もし真ん中の頂点が 1 重だとすると，それからつながった 12 個の頂点も同じ側にあり，この正二十面体の中に反対側の頂点がないことになり矛盾する。よって，真ん中の頂点は 2 重である。また，12 本の辺の先の 12 個の頂点も 12 本辺がでてることから, これらも 2 重の頂点であることがわかり, 図 5 と同じように, w 座標がゼロの超平面を境にして w 座標がプラスの部分とマイナスの部分が対称になりぴたりと重なっていることが分かる。頂点は 75 個あるが，そのうち 33 個からは 12 本の辺が出ており，12 個からは 11 本，30 個からは 8 本の辺が出ている。正二十面体の図 5 と対比して考えると，正六百胞体の各頂点からは 12 本の辺が出ており，11 本しか辺の出ていない頂点は，w 座標が逆側にある同じ位置の頂点と辺でつながっており，8 本しか辺の出ていない頂点は w 座標が 0 であり，4 本の辺は同じ頂点から出る 2 本の辺が重なっている。実際，これらの頂点からは青い辺が 4 本でており，その先は，他の 8 本しか辺の出ていない頂点である。このように，75 個の頂点のうち 30 個は w 座標が 0 で残り 45 個の頂点は 2 重になっているので，正六百胞体には合計 30＋45×2＝120 個の頂点があることが分かる。

次に，正六百胞体の胞や頂点のつながり方について考えてみよう。射影の真ん中のあたりのつながり方は，正六百胞体の “表面” のつながり方と同じはずである。この立体のまん中の頂点のまわりに，図 3 と同じ正二十面体ができていることは述べた。この 20 個の頂点は, 3 次元模型上で中心からの距離が等しいので, w 座標も等しいことが分かる。すなわち, w 軸に垂直な同一超平面上にある。よって，4 次元空間の中でも，これらの点は正二十面体をなしている。それに対し，中心の頂点は，これらと w 座標が等しくない。すなわち，この点は，4 次元空間内では正二十面体の中心ではない。これは，正二十面体のある頂点とその周りの頂点のなす正五角形の関係と同じである。

3 次元射影上で，この正二十面体と中の 12 本の辺は，正二十面体の各面を底面とした 20 個の四面体をなしている。これらは正四面体よりひしゃげているが，正六百胞体は正多胞体なので，正多面体の胞がつながってできているはずであり，4 次元空間では正四面体のはずである。このように，正六百胞体の胞は正四面体であり，各頂点の周りに 12 個の正多面体が集まっている。20 個の正四面体を 1 つの頂点の周りに集めると 3 次元空間では隙間ができるが，4 次元方向に空間を曲げることによりそれらをつなげており，その分だけ 3 次元射影に現れる四面体はひしゃげるわけである。また，正六百胞体において，各辺の周りに 5 つの正四面体があることもわかる。12 本辺が出ている頂点は，正六百胞体の中心，中心から赤でつながった先（12 個），そこから黄色でつながった先（20 個）がある。どの頂点についても，12 本の辺の先の頂点がつながって二十面体を構成している。周辺部の 11 本辺が出ている頂点では，同じ位置にあるもう一つの頂点が隣の頂点であり，自分自身も含めて二十面体になることが分かる。また，中心点が一つの頂点と重なることから，20 個の正四面体のうち 5 つはひしゃげて三角形になり周りに 15 個の四面体が残っている。8 本辺が出ている頂点では，その 8 本の辺の先の頂点は，図 5 の平面図形をなしている。すなわち，正二十面体が完全にぺちゃんこになって，2 次元図形に射影されているのである。これは，図 5 の正二十面体の 2 次元射影で，頂点 b を囲む 5 つの頂点がなす五角形が線分 a c に射影されているのと同様である。20 個の正三角形が図 5 でどのように射影されているかを考えれば，各正四面体の胞がどの形になったかも分かるだろう。図 7 は，これら 5 種類の"二十面体”の写真である。

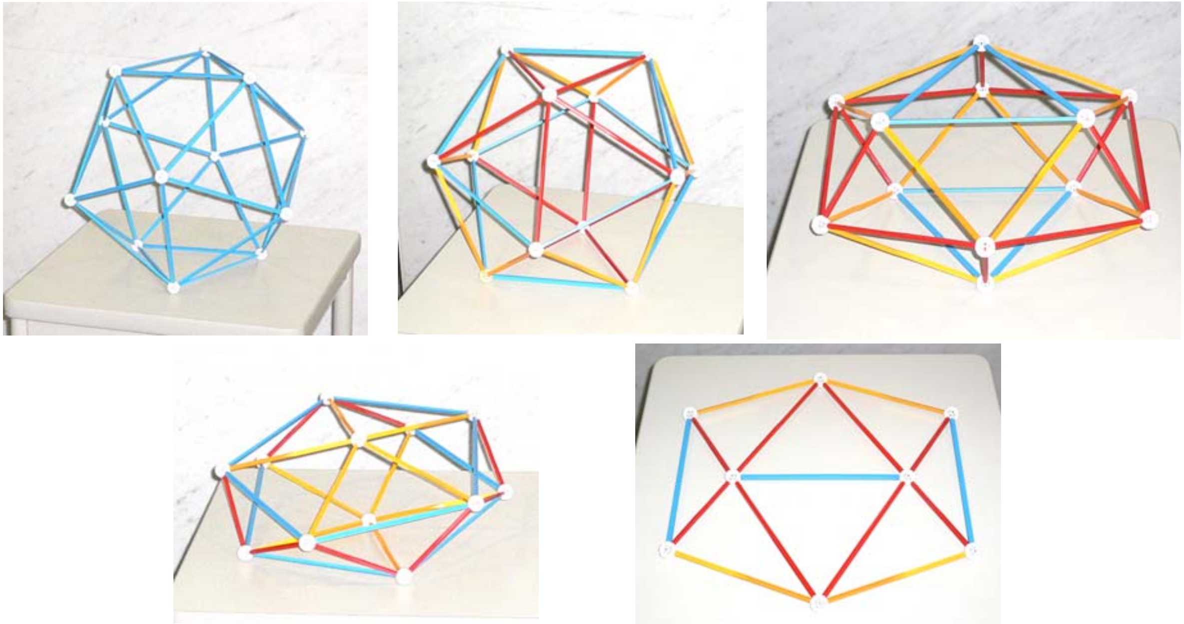
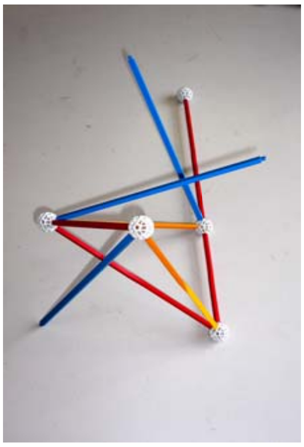


図 7：正六百胞体の射影に含まれる，5 種類の"二十面体“

正六百胞体の 3 次元射影を見ると，正二十面体や斜方十二・二十面体と同じ，H_3 という対称性があることがわかる[5]。この対称性の対称軸の方向にゾムツールの頂点ノードの穴があいていると述べたが，正六百胞体の射影の 75 個の頂点は，すべてこの対称軸の方向に存在している。すなわち，中心に 1 個，5 回の対称軸上に 12x2＝24 個，3 回の対称軸上に 20 個，2 回の対称軸上に 30 個の頂点が存在している。また，辺は，六百胞体には，600×6／5＝720 本の辺が存在しているが，この射影では，周囲の 30 個の 1 重の頂点を結ぶ青い辺が 30×4／2＝60 本存在しており，12 個の頂点において自分自身とつながっている辺が存在しないので，（720－60－12）／2＋60＝384 本存在していることがわかる。内訳は，赤 3 が 72 本，赤 2 が 72 本，黄 3 が 120 本，青 3 が 120 本である。ところで，3 次の対称軸上の頂点と中心の頂点との距離は，黄 3 と黄 2 を合わせた距離になっている。黄 3 と黄 2 の長さの比が黄金比をなすことから，それは，黄 3 の長さの黄金比倍である。同じく，2 次の対称軸上の頂点と中心の頂点との距離は，青 3 の長さの黄金比倍である。このことより，赤 3，赤 2，青 3，黄 3 で作る代わりに，もう一回り小さく，赤 2，赤 1，青 2，黄 2 で正六百胞体を作れば，これらの頂点は，真ん中の頂点と青 3，黄 3 でつながることが分かる。つまり，赤 2 と赤 1 をつなげたものと青 3 と黄 3 を用意し，一つの頂点ノードの 62 個の穴すべてにこれらを挿すだけで，正六百胞体の頂点の配置を作ることが出来る。図 8 の写真では，参考のため，周辺の図 5 の形の六角形を 1 枚だけつなげてある。この射影立体の対称性より，この立体は，3 つの回転軸に囲まれた基本領域に対して，図 9 のパターンが 120 回繰り返されてできていることがわかる。ただし，図 9 の頂点ノードのついていない 3 本の辺は基本領域をまたいでおり，中点までだけを考えて欲しい。このように対称性に注意して考えれば，この一見複雑な立体を見るときに，どこに注意してみればいいか分かる。

n 次元正多胞体を表現する方法に，シュレーフリの記号がある。正六百胞体のシュレーフリの記号は（3，3，5）である。これは，各頂点に正三角形が 3 つ集まってできる正四面体

[5] 正六百胞体自身は，H_4 という対称性をなしている。



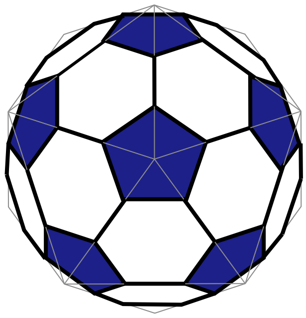


図８：正六百胞体の射影の頂点の配置　図９：正六百胞体の射影の基本領域　図 10：切頂二十面体の射影

が，各辺の周りに 5 つ繋がってできていることを表している。この数字を逆に並べた（5, 3, 3）は，正五角形が頂点に 3 つ集まってできる正十二面体が各辺の周りに 3 つある正多胞体を表しており，それは，正百二十胞体である。これは，正六百胞体の胞の中心を頂点としてできる立体であり，そのような多胞体は双対正多胞体と呼ばれている。正百二十胞体の 3 次元射影も，ゾムツールで作成して面白い立体である。

6.　切頂六百胞体の射影

切頂六百胞体に移ろう。また先に，切頂二十面体で考えることにする。正二十面体の頂点には辺が 5 本集まっているので，頂点の周りを辺の長さが 1/3 のところで切ると，切り口に正五角形がでる。そして，全ての頂点でそのように切ると，面は正六角形になる。こうしてできた立体を，切頂二十面体という。これは，サッカーボールやフラーレンの形として有名な形である。この切頂二十面体の 2 次元の射影は，正二十面体の射影の各辺の 1/3，2/3 の所に印をつけて，それを結んで頂点の周りに五角形を作ることによってできる（図 10）。射影はアフィン写像であり，同一線上では長さの比が保存されるので，切頂の射影は，射影を切頂することで作れるわけである[6]。こうしてできた五角形は，真ん中は正五角形だが，周りのものはゆがんだ形になっている。このゆがんだ五角形は，3 倍すると，元の正二十面体の頂点を結んでできる形になるはずである。そのことを，図 4 の中から確認していただきたい。

今度は正六百胞体の頂点の周りを，辺の長さが 1/3 の点を結んだ超平面で切ることを考える。これまで述べたように，その切口は面ではなく正二十面体という胞になる。全ての頂点でそのように切ると，正四面体だった胞は切頂四面体になる。こうして出来た立体を切頂六百胞体という。切頂六百胞体は，120 個の正二十面体と 600 個の切頂四面体でできている。頂点は 120×12＝1440 個あり，各頂点から正二十面体内の辺が 5 本と正二十面体をつなぐ辺が 1 本の合計 6 本の辺が出ている。

切頂六百胞体の 3 次元への射影は，切頂立体の射影が射影立体の切頂であることから，正六百胞体の 3 次元の射影において，各辺の 1/3, 2/3 の長さの所に印をつけ，各頂点の周りの

[6]1 月 5 日の午後のワークショップでは，図 4 の正 20 面体の絵を描いてから，この方法で図 10 の切頂 20 面体の絵を作成した。この午後のワークショップは中学生が中心であったが，この，リアルなサッカーボールの絵の描き方が，中学生の間ではやるのではないかと秘かに期待している。

1/3 の点を結んでできる“二十面体”を切ってできる立体にほかならない。ここで，“二十面体”としたのは，周辺の 30 個の頂点では射影が二十面体ではなく平面図形になるからである。そして，これらを 3 倍の大きさにした二十面体は正六百胞体の 3 次元射影の中に含まれている，先ほど頂点を囲む二十面体として紹介した図 7 の 5 種類である。この“二十面体”をつなぐ辺は，正六百胞体の辺と同じ向きで 1/3 倍の長さをしているので，このことから，3 倍の大きさにすれば，ゾムツールで，切頂六百胞体の 3 次元への射影を作れることがわかる。博物館に展示されている切頂六百胞体の射影が正六百胞体の射影の 3 倍の大きさをしているのは，この理由からである。切頂六百胞体の射影は，正六百胞体の射影において，頂点のところに，5 種類の“二十面体”を置いたものといっていいだろう。それらは，4 次元空間においた正二十面体を 3 次元に射影したものである。これらのひしゃげた形は，それぞれが正六百胞体の中に存在していた場所に対応する対称性を持っているはずである。よって，5 次の対称性のある頂点に存在するものは，5 次の対称性をもっている。それは，正二十面体を頂点の方向から押しつぶした形であることを意味している。同様に，3 次の対称性のある頂点に存在するものは面の方向から押しつぶした形であり，2 次の対称性のある頂点に存在するもの（六角形）は，辺の方向から押しつぶした形である。

これらの位置は，真ん中の正二十面体との相対位置で考えると分かりやすい。真ん中の正二十面体の頂点の方向には 2 つの二十面体が存在し，それらは，真ん中の正二十面体を頂点の方向から押しつぶした形である。よって，この方向から見ると，5 つの二十面体が重なって見えるが，それらはすべて，図 4 のように射影される。すなわち，5 個全てがこの形にぴったり重なり，全体が 5 回の対称性を持つことになる（図 11）。真ん中の正二十面体の面の方向から見たときも同様で，中心部はぴったり重なって 3 回の対称性をもっている。そして，真ん中の正二十面体の辺の方向から見たときも同様に，真ん中の正二十面体を辺の方向から射影した六角形が表面にも存在するはずである。ただ，この時には，ぴったり重なる必要はない。この六角形は鏡映の対称軸が 2 つ存在しており，それらの対称軸を入れ替えた，つまり，90 度回転された配置も対称性の条件を満たしているからである。実際，この六角形は，そのような向きに配置されている。

胞の繋がり方が，中心の近くでは切頂六百胞体とこの射影で基本的に同じであり，周辺部でゆがむのは正六百胞体の時と同じである。正二十面体と切頂四面体がどうつながっているのか想像してみて欲しい。周辺部で辺が 6 本出ていない頂点がどうなっているかとか，切頂四面体がどう変形しているかとかを考えるのはいい練習問題になるだろう。

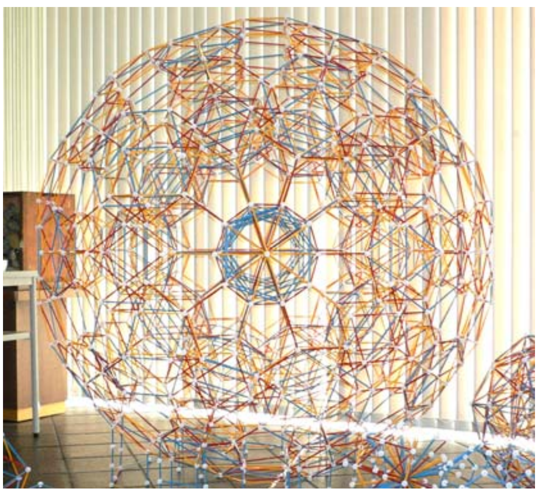
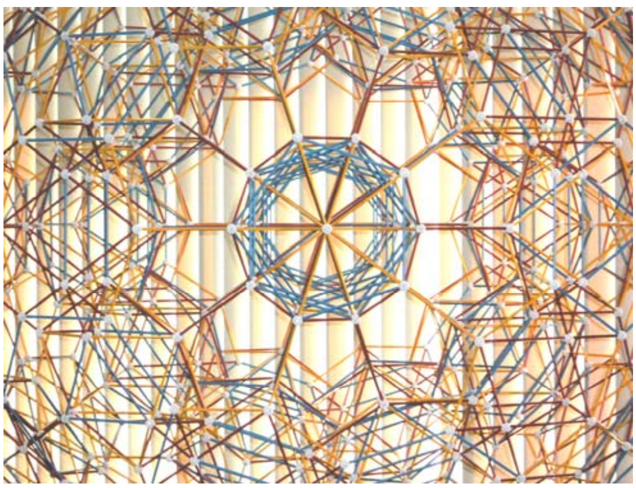



図 11：5 回対称軸方向から見た切頂六百胞体オブジェとその拡大

7.　形シューレ

今回のワークショップは，形シューレの新春企画の一つとして，前日 1 月 5 日の京都大学時計台記念館における講演会とともに企画された。前日の講演会でハート先生は，それまで作られた幾何学的な芸術作品の紹介をしてから，ゾムツールについて，特に，ゾムツールを用いた 4 次元の H_4 対称性をもつ立体の射影像を制作する，これまでのワークショップについて話をされた[4]。1 月 6 日の午前のワークショップでは，最初に，立方体や正二十面体を作ってゾムツールの扱いに慣れたあと，頂点のところにくる 75 個の“二十面体”を作成し，それを組み上げていくという手順をとった。幾つかのハプニングがあったが，約 30 人の参加者で，10 時から始めて 3 時間後には，巨大なオブジェができあがった。強度の問題から，中心から対称的に組むのではなく，急遽，下から順に組み上げることになったが，この立体の構造を完全に理解していないとできない技である。ハート先生の造詣の深さに感激した。午後のワークショップでは，正確に切頂二十面体の絵を描いた後に CD で切頂二十面体オブジェおよび，関連したオブジェを制作するワークショップを行った。その過程については，ハート先生のホームページ[3]に掲載されているし，[5]に参加者による報告もあるので，そちらの方を参照していただきたい。ハート先生のワークショップは緻密に計画されており，進め方は臨機応変であり，たいへん参考になった。前日のゾムツールについての講演から，切頂六百胞体オブジェの製作，切頂二十面体オブジェの製作と，流れのある内容でハート先生に講演とワークショップをしていただけてよかったと思っている。今回のワークショップでは，多くの人と出会うことが出来，大変楽しいものであった。ハート先生や，前日の講演会で話をされた倉敷芸術大学のカスパーシュワーベ教授はもちろんであるが，参加者の皆さんに見せていただいた作品にも驚かされた。

プラスチックの棒とボールの部品からあのように大きくてきれいなオブジェができること自体が感動的だし，その達成感はひとしおである。しかし，私は，本稿に書いたような，この立体の意味する数学的内容の方がより感動的だと思っている。しばらくは，博物館内に切頂六百胞体オブジェは展示される予定である。興味のある人は，本稿を片手に足を運んでいただきたい[7]。また，Japan Zome Club ホームページ[5]では，正六百胞体や切頂六百胞体の射影を VRML で回しながら観察することが出来る。そちらの方も参考になるだろう。

京都大学総合博物館の大野照文教授をはじめとするスタッフの方々，今回の共同企画者である宮崎興二京都大学名誉教授，ゾムツールを提供して下さった Image Mission 社の前畑典子氏，講演会とワークショップを手伝っていただいた京都大学の学生，参加するだけではなくご協力をいただいた参加者の皆様，そして，何よりハート先生に感謝いたします。

文献：

[1] 一松信「高次元の正多面体」日本評論社(1983)

[2] 宮崎 興二編，石井 源久，山口 哲著「高次元グラフィックス」京都大学学術出版会(2005)

[3] http://georgehart.com,　George W. Hart ホームページ

[4]G. Hart, "Four-Dimensional Polytope Projection Barn Raisings," in Proceedings of International Society of Art, Math, and Architecture 2007, Texas A&M, May, 2007.

[5] http://www.zome.jp,　Japan Zome Club ホームページ

[7] 展示が行われているかどうかは，筆者のホームページ http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki に掲載する。