

## Zome ツールによる **切頂 600 胞体**

2008年1月5日、N.Y.ストーニ・ブルック大学のジョージ・ハート教授の指導のもと、約30人の参加者でZome ツールを用いてこの立体を作成しました。この大小2つの立体は、600胞体と切頂600胞体という4次元の立体を3次元に射影したものです。これらの形を見ながら、600胞体や切頂600胞体がどんな形をしているのか一緒に考えてみましょう。

### 1. 多胞体とは？

2次元の正多角形、3次元の正多面体に対応する4次元の図形を正多胞体といいます。正多面体が正4面体、正6面体、正8面体、正12面体、正20面体の5種類しかないように、正多胞体も正5胞体、正8胞体、正16胞体、正24胞体、正120胞体、正600胞体の6種類しかありません。正多面体が正多角形の面に囲まれているのに対し、正多胞体は正多面体で囲まれています。それらを多胞体の胞といいます。

### 2. 正20面体の射影

4次元の正600胞体の3次元射影について考える前に、3次元の正20面体の2次元への射影について考えましょう。正20面体は頂点が12個と正三角形の面が20個あります。それに対して、頂点の方から正20面体を見た絵を考えると、上図のように、真ん中の2つの頂点が重なって11個の頂点が見えます。そして、手前側に10個の三角形、向こう側に10個の三角形があります。この絵を、正20面体の2次元への射影といいます。射影上の点の位置は  $(x, y)$  という2次元の座標で指定できますが、対応する正20面体の点は、これに  $z$  座標が加わります。射影を見て3次元の立体を想像する時には、このもう1つの座標を加えて3次元にふくらませる必要があります。手前をプラスにすると、周辺の5角形をなす5つの頂点は  $z$  座標がプラス、あと5つの頂点はマイナス、そして、真ん中はプラスとマイナスの2つの頂点重なっています。

このように、全体の形を想像するには3次元で考える必要がありますが、表面のつながり方はそのまま見て取れます。正20面体は、1個の頂点到5個の辺と5個の正三角形が集まっています。この射影でも、手前の部分だけを見れば、真ん中の頂点の周りを5個の辺と5個の三角形がとり囲んでいます。ただし、正三角形5個で頂点の周りを1週するのは3次元では不可能で、そのため面が3次元の方向に曲がっており、その分だけ射影に見える三角形はちょっとひしゃげた形をしています。その周りの5個の三角形はもっとひしゃげていますが、頂点と頂点のつながり方は、正20面体でもその射影でも変わらず、どの頂点も5個の辺と5個の三角形に囲まれています。

### 3. 正600胞体の射影

展示されている小さい方の立体が正600胞体の3次元射影です。正20面体の2次元射影から正20面体を想像した方法で、正600胞体の3次元射影から正600胞体を想像してみましょう。正600胞体は4次元空間にあるので、正600胞体の各点はもう一つの座標 ( $w$  とよぶことにします) を持っています。正20面体では手前側と向こう側がずれていましたが、正600胞体では、 $w$  座標がゼロの部分 (このようなものを超平面といいます) を境にして、 $w$  座標がプラスの部分とマイナスの部分は対称になっていて、ぴったりと重なります。正20面体では、中心の近くでは  $z$  座標の絶対値が大きくて、周辺に行くほど  $z$  座標の絶対値が小さくなりました。4次元

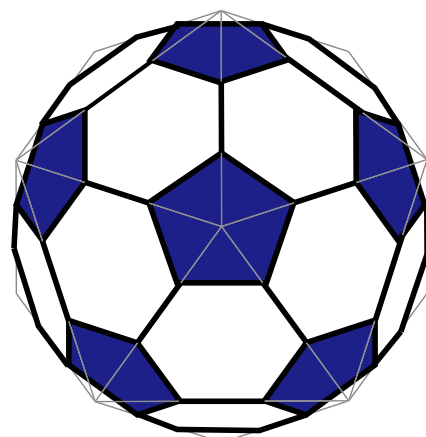
立体の3次元射影でも同じで、中心から遠くなるほどw座標の絶対値は小さくなり、この立体を囲む球上でw座標が0になります。この立体には頂点が75個あります。その中で、青い棒が4本出ている30個の頂点はw座標が0で、正600胞体の1個の頂点に対応します。それ以外の45個はw座標がプラスとマイナスの2個の頂点が重なっています。ですから、正600胞体には、 $30+45\times 2=120$ 個の頂点があります。

次に、正600胞体の胞と頂点のつながり方について考えてみましょう。この立体のまん中の頂点から出ている辺を数えてみてください。12本あるはずですが、また、頂点の回りに、正4面体よりひしゃげた4面体が20個見つかるとは限りません。正600胞体の各頂点の周りは12本の辺と20個の正四面体がつり囲んでいます。20個の正四面体を1つの頂点の周りに集めると、3次元空間では隙間ができます。4次元方向に空間を曲げることにより、それをつなげているのです。その分だけ射影では4面体がひしゃげた形をしています。他の内側の方の頂点も、12本の辺と20個の4面体に囲まれているのが分かると思います。4面体のひしゃげ方は周辺にいくほど激しくなります。

周辺部の頂点を見ましょう。一番外側の青い棒が4本ある30個の頂点は、w座標が0で、正600胞体の1つの頂点に対応していると述べました。これらの頂点は辺が8本しか出ていませんが、そのうちの4本は内側で2重に重なっている頂点に向かっており、4本はw座標が0の別の頂点に向かっており、4次元空間ではあわせて12本になります。もう一つ内側の、赤と黄色い棒が5本と赤い短い棒がつながった頂点を考えます。この頂点は辺が11本しか出ていませんが、4次元では12本目の辺でw座標が逆で自分と同じ位置にある頂点とつながっています。

#### 4.切頂600胞体の射影

正20面体の頂点には辺が5本集まっているので、その周りを、辺の長さが1/3のところまで切ると、切り口に正五角形ができます。全ての頂点でそのように切ると、面は正六角形になります。こうしてできた立体を切頂20面体といいます。これは、サッカーボールやフラーレンの形として有名ですね。この切頂20面体の2次元の射影は、正20面体の射影の各辺の1/3、2/3の所に印をつけて、それを結んで頂点の周りに五角形を作ることによってできます。こうしてできた五角形は、真ん中では正五角形ですが、周りのものはゆがんだ形になっています。



同じように、正600胞体の頂点の周りを、辺の長さが1/3のところまで切ることを考えます。今度は、切口は面ではなくて胞になります。正600胞体の頂点は12本の辺に囲まれているので、その胞は12個頂点を持つ正20面体になります。全ての頂点でそのように切ると、正4面体だった胞は切頂4面体になります。こうして出来た立体を切頂600胞体といいます。切頂600胞体は、120個の正20面体と600個の切頂4面体でできています。

ここに展示されている大きな方の立体は、切頂600胞体を3次元に射影したものです。3次元に射影することにより、真ん中だけきれいな正20面体があり、周りの20面体はひしゃげた形をしています。それぞれの頂点の所にある正20面体の射影の模型を手前に並べてあるので、これらの形をこの立体の中から探してみてください。それぞれいくつありますか？どんどんひしゃげていって、周りのw座標が0の頂点では、2次元におしつぶされてぺっちゃんこになっています。この形は、正20面体の2次元射影になっています。正20面体をどの方向から見たらこの形に見えますか？

この立体は複雑に見えますが、同じことの繰り返しで出来ています。繰り返しの単位は、真ん中の正20面体の三角形の面1つ分です。その部分の構造が分かると、その繰り返しですから全体の構造も分かります。いろんな形の正20面体の射影はどこにありますか？それぞれ幾つありますか？切頂4面体の射影についてはどうでしょう？

この立体を、真ん中の正20面体の頂点、面、辺の方向から見てみましょう。きれいに見えるはずですが。正20面体は、頂点、面、辺の中心に、それぞれ5, 3, 2回の回転対称の軸がありますが、この立体もそうです。対称性は、我々の美的感覚に訴えかけてくるものです。