

Imaginary Cube とそれを用いた数学教材

立木秀樹

京都大学大学院 人間・環境学研究科

tsuiki@i.h.kyoto-u.ac.jp

<http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki>

Imaginary Cubes and their Application to Math Classes

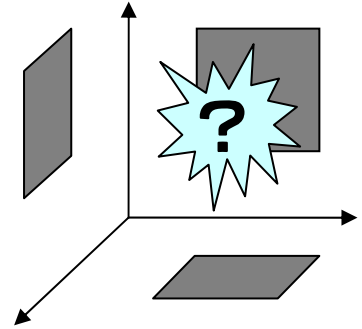
Hideki Tsuiki

Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

Abstract: An Imaginary-Cube (or I-cube) is a 3-dimensional object with three square projections like a cube. We show that there are 15 equivalence classes of minimal convex I-cubes, and show how they are used in math classes.

Keywords: Geometry, Square, Projection, Mathematical Education, Combinatorics

直交する3方向からある立体に光をあてた時に、図のように正方形の影が出来たとする。その立体はどんな形だろうか？もちろん立方体は一つの答えであるが、正四面体など、他にも数多くそのような立体は存在する。そのような立体は三つの正方形の影から決まる立方体を想像させるので、Imaginary Cube (省略して I-cube) と名づけることにする。さて、三つの正方形の影を固定したとき、その影に合う I-cube はいくつあるだろうか？



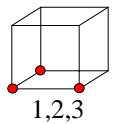
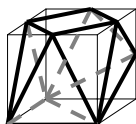
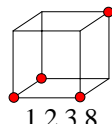
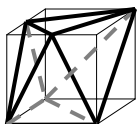
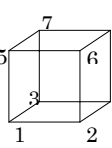
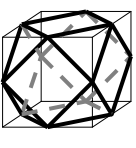
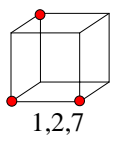
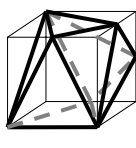
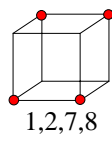
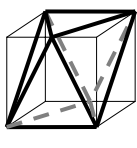
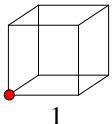
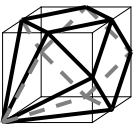
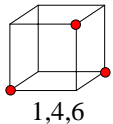
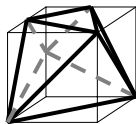
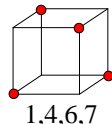
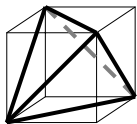
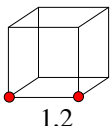
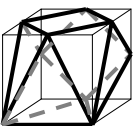
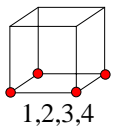
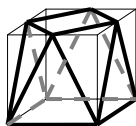
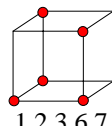
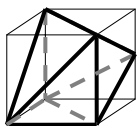
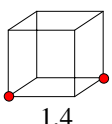
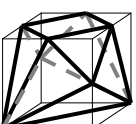
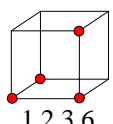
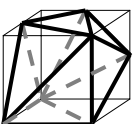
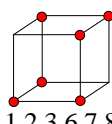
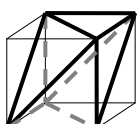
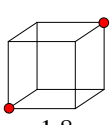
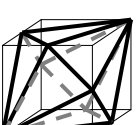
もちろん、そのような I-cube は無限にある。そこで、もう少し制限して、極小な凸 I-cube だけを考える。極小な凸 I-cube は多面体になり、立方体の6つの面方向から見た時に、正方形を多角形で分割した形に見える。その分割の仕方が同じもの、すなわち、その分割を I-cube と立方体の頂点をつないだグラフと見て、どの方向からの見え方もグラフとして同値なものを同一視して極小な凸 I-cube の個数を考える。

まず、凸多面体が I-cube であるための必要十分条件は、三方向の影から決まる立方体の12個のすべての辺上に頂点があることである。辺上に2個頂点がありその一つが辺の両端以外にあると極小性に反するので、各辺について両端以外にある頂点は高々1つであり、それを動かしても同等な I-cube になる。このことから、I-cube の頂点の配置は立方体の頂点から頂点の選び方により決まり、立方体のある頂点とそれに隣接する3頂点を選ぶと極小性に反するので、そうならない立方体の頂点の部分集合に対応して極小凸 I-cube が存在することになる。それは、次ページの15通りある。ここでは、辺上の頂点は辺の midpoint にとった。このうち1個は対称面を持っていないので、鏡像を区別すると16通りになる。このように対称性の高いものから、面对称性がないものまで多彩である。この16個の I-cube を組み合わせて作った I-cube オブジェも展示しているので、ご覧いただきたい。

これらを用いた授業を、京都府立洛北高等学校附属中学校1年と白陵中学校3年を対象にして行った。16個の I-cube の展開図をグループごとに配り、組み立てる前に、展開図

から面，辺，頂点の個数を考えさせる。頂点の個数は簡単には分からないので，オイラーの定理が役立つ。正多面体以外の立体図形に授業で触れるのは稀なので，それを作成すること自体が楽しみである。作成してから，どれがきれいでどれがきたないか考えて投票させ，それから，それぞれの対称面，対称軸を探してもらい，立体の対称性が綺麗さに関係していることを実感してもらおう。それから，この 16 個の共通する性質を考えさせる。これらの立体を見て，ある方向から見て正方形に見えることに気づくのは容易ではない。そこで，一つの面のない透明な立方体の箱を作り，それに入れてもらう。そうすると 3 方向から正方形に見えることが一目瞭然となる。この、立方体の箱に入れること自体が面白いパズルである。京都大学総合博物館で，I-cube を用いて「この立体を箱に入れてみよう」という展示を行っているが，小学生から大人まで好評である。それから，これらが極小凸 I-cube であり，それがこの 16 個に限られることを説明する。それにより，箱に入れた時に箱の頂点と一致する頂点のとりかたで個々の立体を特徴づけることに気がつく。

中学三年の授業では，2 時間半でこの内容を行い，最後に I-cube オブジェも見せた。工作を楽しみ，たくさんことに気づき，正射影や対称性などの立体幾何，および，組み合わせ数学を学ぶ，実りのある授業ができた。内容を選べば，小学生から大学生までどのレベルにも用いることが出来る，おもしろい教材だと思う。I-cube の展開図は私のホームページからダウンロードできるので，是非この教材を試してみたい。

番号 (#頂点 #面)	立方体の 頂点集合	I-cube						
			6 (11,8)			11 (8,6)		
1 (14,12) 立方八 面体			7 (10,6)			12 (8,6)		
2 (13,10)			8 (8,6) 反三角 錘台			13 (4,4) 正四 面体		
3 (12,9)			9 (10,8) 反四角 錘台			14 (8,6)		
4 (11,8)			10(L) (10,7)			15 (8,6) 反三 角柱		
5 (12,8) 重六角 錘			10(R) (10,7)	