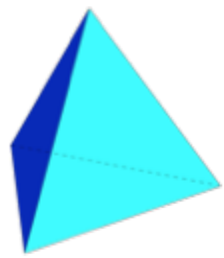
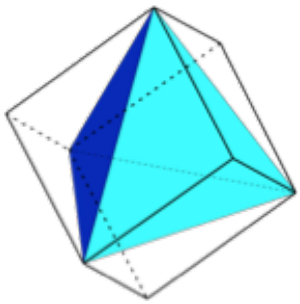
イマジナリーキューブのお話

京都大学 総合人間学部／人間・環境学研究科 立木 秀樹

１． シェルピンスキー四面体



正四面体は、正三角形の面を４つ持つ立体です。正四面体は、どの面から見ても正三角形だし、どの頂点から見ても正三角形に見えます。



しかし、辺の方向から見ると、正方形に見えます。(あるいは、辺の方向から光を当てると正方形の影ができます。) このことは、正四面体を立方体の箱に入れて考えると分かりやすいです。正四面体のことを、レベル０の立体ということにします。辺の方向というのは、正三角形の辺が６辺あって、２辺づつが対になっているので、３方向あります。そして、その３方向がお互いに直交していることも、こうして立方体の箱にいれてやると一目瞭然になります。

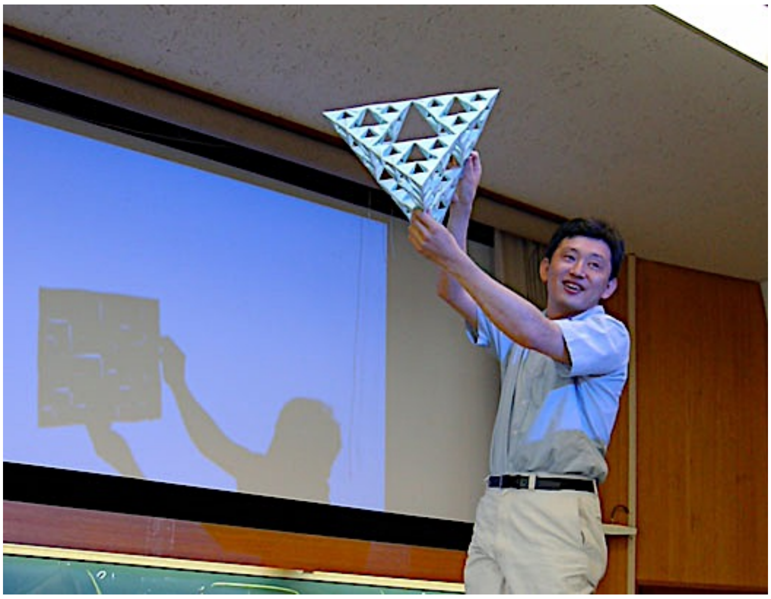
次に、図のようにレベル０の立体（正四面体）を半分の大きさにしたものを４つ用意して、それらを頂点でくっつけた立体を考えます。この立体を、レベル１の立体と呼ぶことにしましょう。これは、全体で元と同じ大きさの正四面体を作るので、正四面体の真ん中に穴をあけた形と言うこともできます。ちなみに、穴の形は正八面体ですし、体積はレベル０の立体の半分、面積はレベル０の立体と同じです。

今度は、レベル１の立体にも同じことをしてやります。つまり、半分の大きさにしたものを４つ用意して、それら頂点でくっつけてやります。そうしてできた立体をレベル２の立体と呼ぶことにします。同じようにして、レベル３，レベル４の立体と、次々と作っていきます。体積は半分づつになっていきますが、表面積は変わりません。実際に作るのは不可能ですが、レベル１００の立体でも、レベル１０００の立体でも考えることはできますね。

さて、これらの立体に辺の方向から光をあてると、どんな形の影ができるでしょうか。まず、レベル０の立体である正四面体は、辺の方向から光をあてると正方形の影ができるということをすでに説明しました。レベル１の立体はどうでしょうか。これは正四面体に穴をあけた形なので、その影も正方形に穴をあけた形です。一方、半分の大きさの正四面体４つからできているので、半分の大きさの正方形を４つ合わせた形でもあります。このように考えると、影の穴がきれいにふさがっ

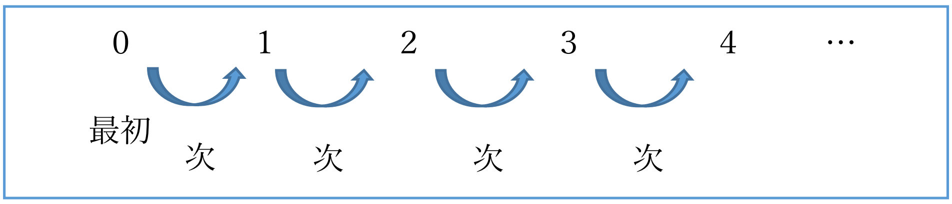
て、この形の影も正方形になることが分かります。

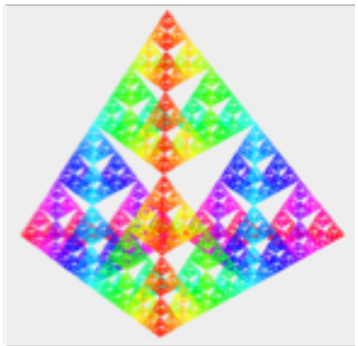
次に、レベル２の立体はどうでしょうか。これも、全体が正四面体に穴をあけた形なので、その影も正方形に穴を開けた形になることと、４つの部分の影がそれぞれ半分の大きさの正方形になることから、同じように考えて、穴がふさがって正方形になることが分かります。同じ議論をもう一度繰り返すと、レベル３の立体が正方形の影をもつことが分かります。同じ議論を繰り返し行うと、どんな自然数 n に対してでも、レベル n の立体は辺の方向から光をあてると正方形の影をもつことがわかります。もう少し言い換えると、全ての自然数 n に対し、レベル n の立体は辺の方向から光をあてると正方形の影をもつということです。



影に注目！

個々の場合ではなく、全ての場合について成り立つことが分かるのはすごいと思いませんか。それがうまくいくのは、上ではレベル０からレベル１、レベル１からレベル２という個々の場合について考えましたが、その説明は、どんな n の時でも、レベル n の立体場合に成り立っているなら、レベル（n+1）の立体の場合にも成り立っていることを示しています。このようにして０の時に成り立つことと、n で成り立つなら n+1 でも成り立つことを示すことにより、全ての n で成り立つことを示す証明の方法を、数学的帰納法といいます。（0 を含む）自然数は、０から始めて次の数をとる操作を繰り返すことによりできています。数学的帰納法は、その構造に従った証明方法といえます。このように、人間の脳は有限の大きさなので有限の時間の中で考えられることは有限なのに、数学的帰納法を用いると、無限に存在する自然数全てで成り立つことが示せるのです。

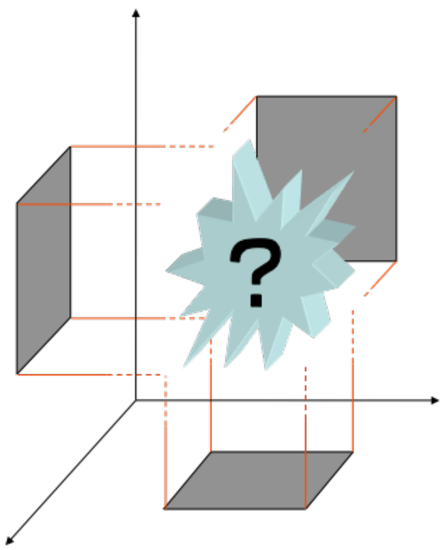




レベル０の立体，レベル１の立体、… というのを無限に繰り返すと、シェルピンスキー四面体と呼ばれる立体になります。無限に繰り返すというのはあいまいな言い方ですが、この場合には、前の立体に対して次の立体の方が小さくなっているので、これら無限個の共通部分と言い換えることができます。あるいは、レベルが進むと、どんどん前の立体を削っていくことになりますが、どのレベルでも削られない部分ということもできます。シェルピンスキー四面体は、もはや工作で作ることは絶対に不可能ですが、そういう点の集まりを考えることはできますよね。シェルピンスキー四面体は４つの部分からなりますが、それらは、1/2 に縮小されたシェルピンスキー四面体になります。このように、自分自身を相似縮小したものをいくつか組み合わせるともとの図形に戻るような図形を、自己相似図形といいます。また、自己相似図形では、どの部分を見ても全体と同じような構造が見えますが、そのような図形をフラクタル図形といいます。シェルピンスキー四面体は、フラクタルな立体の中でも代表的なものです。

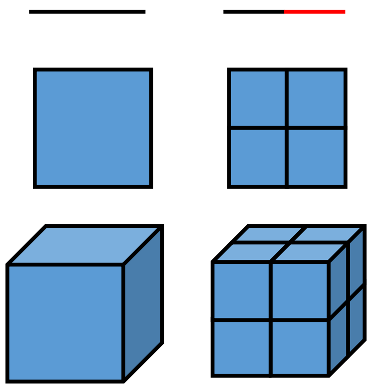
シェルピンスキー四面体も辺の方向から光をあてると正方形の影ができます。しかし、もはや作ることが不可能な立体なので、それに光をあてるなどということ自体がナンセンスです。数学では、射影という概念を定義して、それを用いて「シェルピンスキー四面体は相対する辺の中点を結んだ直線にそって射影すると正方形になる」といいます。これ以上の説明は、実数の連続性と位相の概念が必要になるので割愛します。

２．　Ｈ と Ｔ のフラクタル



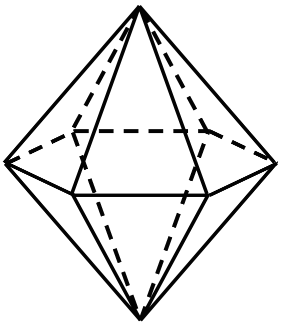
さて、正四面体もレベル１立体もレベル２立体もシェルピンスキー四面体もすべて、立方体と同じように、直交する３方向に射影すると正方形になるような立体でした。このような立体のことを、イマジナリーキューブと名付けることにします。シェルピンスキー四面体は自己相似なイマジナリーキューブでした。それでは、シェルピンスキー四面体以外にも、同じような立体は存在するのでしょうか。より具体的に言うと、自己相似なイマジナリーキューブで、さらに、相似次元が２のものは存在するのでしょうか？

ここで、相似次元というのは、今考えているのは自己相似な図形なのだから縮小したものを幾つか集めると元の図形に戻りますが、どれだけ縮小したものを幾つ集めると元に戻るかを示した数です。そして、1/n に縮小したもの n^k 個で元に戻る時には k 次元といいます。図に n=2 の時で示したように、線分は相似次元が１，正方形は２，立方体は３です。今考えている立体は、正方形に射影される自己相似な立体でした。一般に射影すると相似次元は等しいか小さくなるので、自己相似なイ

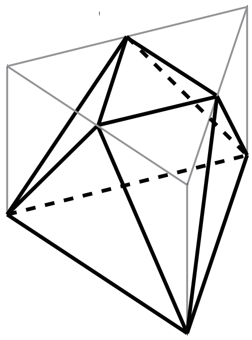


マジナリーキューブの相似次元は２以上でないといけないことが分かります。相似次元が２次元というのは、その中でもっともスカスカにできているということです。さて、そのような立体はシェルピンスキー四面体の他にあるでしょうか？

ここから先は、丁寧な説明は長くなるので結果を中心に述べていくことにします。相似次元２ということで、まず n=2 の時を考えます。つまり、1/2 に縮小したもの４つで元に戻る立体です。シェルピンスキー四面体はそういう立体でした。そのようなものは、（縮小時に回転を行わないという条件の元では）シェルピンスキー四面体だけです。次の可能性は n=3 で、1/3 に縮小したもの 9 つ集めると元に戻るものです。そのような立体として、これから説明する２つがあることが分かりました。まず、基本となる多面体は、下図に示す２つの立体です。左は、六角錐の底面を張り合わせたもので、底辺と高さの比が 2:3 の二等辺三角形の面を１２個もっています。右は、底辺の長さが$\sqrt{2}$で高さが$\sqrt{3}$の正三角柱の片方の底面の頂点の周りを切ってできた形です。それぞれ、Hexagonal Bipyramid（重六角錐）と Triangular Antiprismoid（反三角錐台）の一種なので、頭文字をとって、H と T と名付けました。これらがイマジナリーキューブだとすぐに分かる人は少ないでしょう。

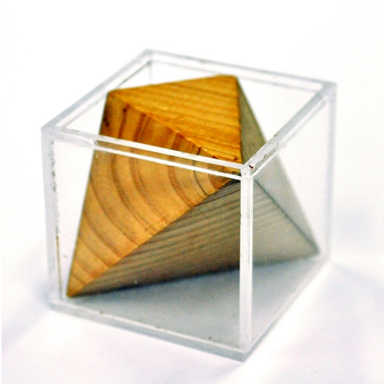


H

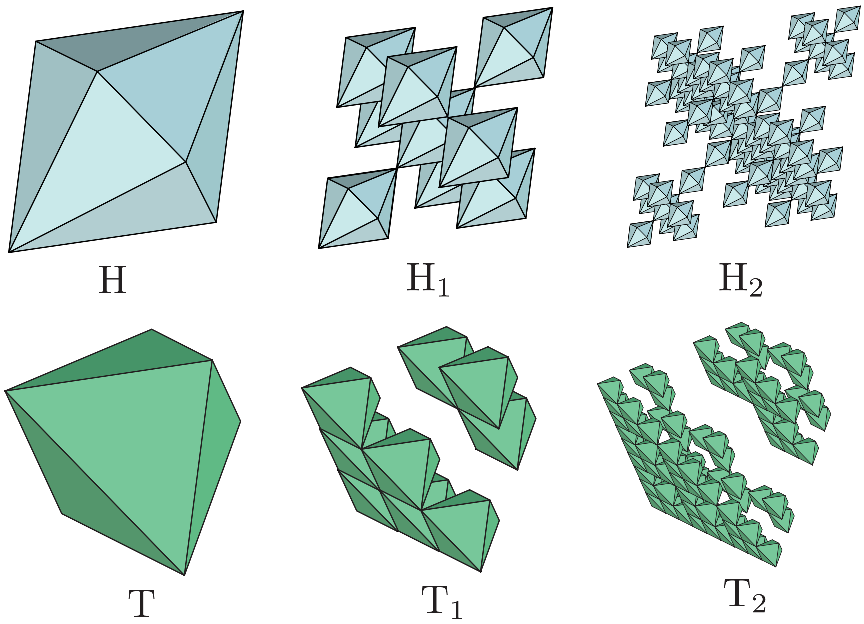


T

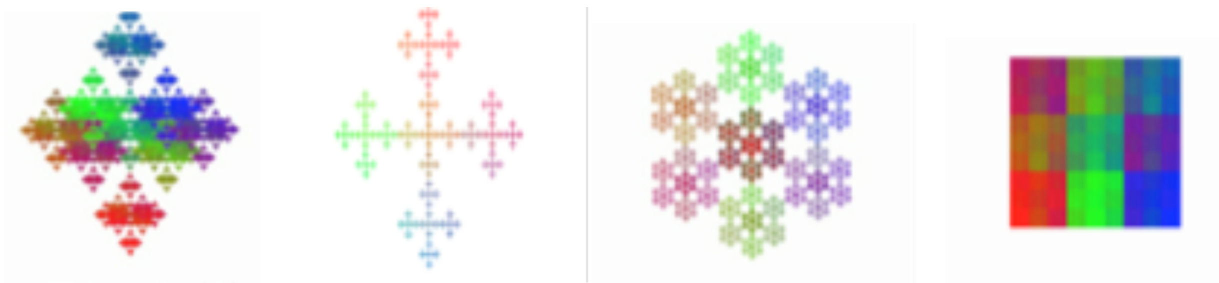
これらは、下図が示すように、立方体の箱に入り、イマジナリーキューブだと分かります。



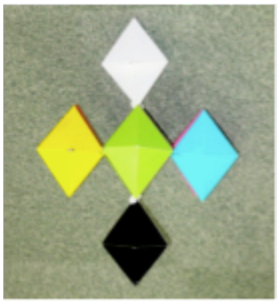
H と T は、箱に入れた状態を先に考えて、それから辺などの長さを計算しています。このように、数学の問題は、答えの方（すなわち、数学的な構造）が先にあって、それから導かれる結果をもとに作られることが多いです。そのようにされると、問題を見せられた方は手品のように感じますね。イマジナリーキューブになっている多面体は他にもいろいろ考えられますが、H と T は、これらをもとにフラクタルを作れるという特別な性質を持っています。このそれぞれの立体を 1/3 に縮小したものを下中図のように 9 つ配置してできる立体をレベル 1 の立体として考えます。これらもイマジナリーキューブになっています。立方体の箱に入れた状態を想像して、箱の面からどう見えるか考えて下さい。そして、こららがイマジナリーキューブになっていることから、下右図のようにレベル 1 立体を同様に配置してできたレベル 2 の立体もイマジナリーキューブだと分かります。



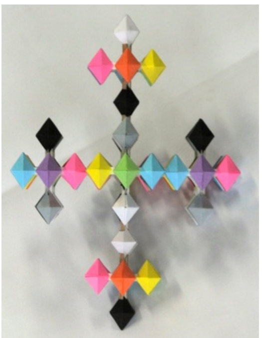
そして、どこまで進んでもイマジナリーキューブであり、その極限となるフラクタルもイマジナリーキューブだと分かります。正方形に見える方向だけに注目しましたが、これらのフラクタルは、他の方向から見ても、とてもきれいな形をしています。次の絵は、H のフラクタルをいろんな方向から射影したものです。どの方向から射影したらこうなるか分かりますか？



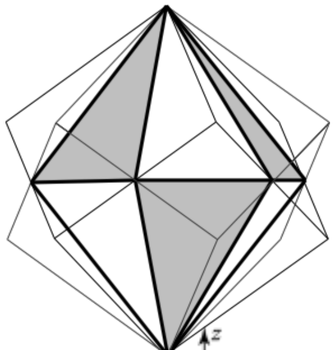
H のレベル 1 とレベル 2 の立体を対応した方向から見た写真を並べますので、それらと見比べてください。同じイマジナリーキューブのいろいろな方向からの写真です。



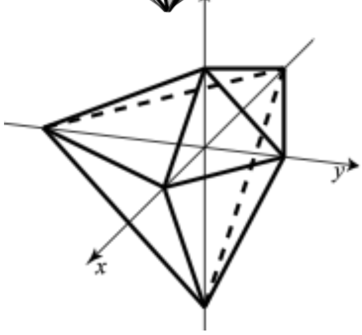


Ｈ のフラクタルのレベル２の立体を作りました。最初、１０年近く前に当時の学生に手伝ってもらって大きなものを作成して京都大学総合博物館のロビーに展示していたのですが、３年前に、塚本靖之氏が持ち運び可能な大きさのものを作ってくれました。上の写真はその後者です。この立体は８１個のＨからなっており、正方形に見える方向が６つあります。下に述べる様に、実は、Ｈおよびこのフラクタル立体が一番右の写真のように正方形に見える方向は、３方向ではなく６方向あります。それらの方向から見た時には、81 個の H それぞれが正方形になって 9x9 の正方格子をなしています。81 個の H に 9 色で色をつけて、6 つの正方形に見えるどの方向から見た時にも、どの列にもどの行にもどの３ x ３のブロックにも 9 色全てが現れる（すなわち、数独パズルの解のパターンになっている）ように色付けをしてあります。写真をよく見てください。



３．　　Ｈ と Ｔ の空間充填とパズル

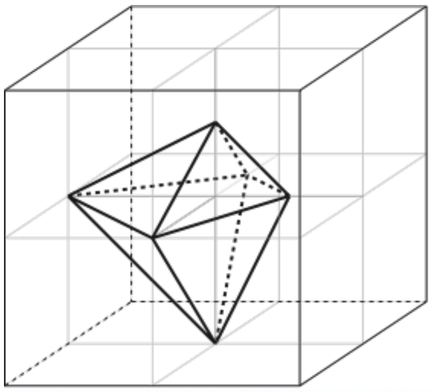
ＨとＴはとてもいい性質を持っています。まずＨは、イマジナリーキューブとして直交する３方向から見て正方形に見えるのはその通りですが、そのような直交する３方向が２セットあります。よって、合計６方向から見て正方形に見えます。このような立体を、ダブルイマジナリーキューブと呼ぶことにします。



次に Ｔ は、図のように配置すると、３次元の ３ 本の座標軸の上に６つの頂点が全て乗るようにできます。原点からの距離が全て等しかったら、これは正八面体です。それに対し、Ｔでは原点からの距離が１の頂点と２の頂点が同じ座標軸上でペアになっています。このように、Ｔは正八面体

の亜種でもあるのです。さらに、この長さが2の部分の長さは、T がイマジナリーキューブとして収まる箱の1辺の長さと一致しています。

H と T はこのように、別々に見ても面白い立体ですが、組み合わせると、さらに面白い性質が見えてきます。実は、H と T でこの3次元空間を充填することが出来ます。次の写真を見ながらそのことを考えてみてください。



H と T を用いたパズルを考案しました。2倍の大きさの箱に、H を3個と T を6個すきまなく入れるというものです。イマジナリーキューブなので2倍の大きさの箱なら8つまでは入ることが分かりますが、ピースは合計9つあります。そこでどうやったら入るのだろうと考えるパズルになります。

上に述べた T の性質から、T は箱の真ん中に右図のように配置できます。そうすると、この T の8つの面は、周りの8つの立方体をそれぞれ切ることになります。そして、空間充填することから、この T の周りには8つの立体が隙間なくくっつけることができるのですが、それらが収まる立方体の向きをそろえることができて、よって、この箱の中に収まるのです。箱に全て入れた時の形は対称的で美しいです。また、これを見ていると、立方体が頂点の方向から見た時に3回対称性を持っていることを、改めて意識させられます。このパズルは、イマジナリーキューブパズル 3H=6T という名前で京都大学博物館ショップで販売してお

ります[1]。

　このパズルは、解くこと自体の楽しみに加えて、解いている中で、Ｈ と Ｔ の数学的な性質を体感することができます。そして、解いた後に、きれいな対称性をもつ立体オブジェと、それらの普遍的な事実に出会った感動が残ります。

　この２つの立体の不思議な性質がなぜ出てくるのか知りたくなり、ボロノイタイリングとの関係や高次元への拡張などについても調べたのですが、話が長くなるのでここで終えることにします。詳しくは、論文を御覧ください[2,3]。

４.　おわりに

　数学の本質は、数学的構造の中に美しさを感じて、それについて調べることだと思っています。そして、証明という形の厳密な説明をつけながら考えていきます。数学的な事実が正しいのは、本に書いてあるからでも、偉い人がそう言っていたからでも、多くの例を検証してみて全てそうなっていたからでもありません。数学は、論理を追っていけば、誰でもその正しさについて完全に納得できるものです。数や図形といった数学的な対象のもつ性質に興味を持ち、何故そうなるのか知りたくなり、そして、その裏にある構造を考えてその説明を導いたり、人から聞いて納得したりする、それを繰り返していくのが数学だと思います。数学が好きだというのは、そうやって考えることに楽しみを覚えることではないかと思います。

　ですから、数学を好きになるための第一歩は、面白い現象に出会って、それに興味を持って、もっと知りたいと思うことなのではないでしょうか。そして、自分で考えみて、それから人の説明を聞いて自分の頭でなるほどと納得する、すぐにはぼんやりとしか分からなくても、繰り返し考えているうちに、構造がイメージできるようになってきて、ある時さっと分かる、そういう経験を積むことが重要なのではないかと感じています。イマジナリーキューブは、工作をしたりパズルとして遊んだりしながら数学的現象を体感し、視覚的なイメージとともにその奥にある構造について考えることができます。イマジナリーキューブは、小学生から大人まで全ての人が楽しめる数学の教材を提供していると思うのですがいかがでしょうか。

　参考文献：

[1] 立木秀樹 『イマジナリーキューブパズル 3H=6T』(パズル付き小冊子), 京都大学総合博物館ショップMusep, 2012.

[2] Hideki Tsuiki: Imaginary Cubes and Their Puzzles, Algorithms 2012, 5(2), 273-288.

[3] Hideki Tsuiki and Yasuyuki Tsukamoto: Imaginary Hypercubes, in Discrete and Computational Geometry and Graphs, Lecture Notes in Computer Science Volume 8845, 2014, pp 173-184.

[4] 立木秀樹ホームページ http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki