イマジナリーキューブ (1)

立木秀樹

1 イマジナリーキューブ

次の問題を考えてみてください。

直交する 3 方向から正方形に見える立体は何でしょうか？

立方体は一つの答えです。しかし、立方体だけが唯一の答えではありません。立方体の頂点の周りを少しだけ削ってもこの性質を満たしていることは明らかですし、正四面体や立方八面体もこの性質を満たしています。

直交した 3 方向から射影して立方体と同じ様に正方形になる立体のことを、**イマジナリーキューブ** (*) と名付けることにします。図 2 に代表的なイマジナリーキューブをあげました。正方形に見える方向は分かりますか？

(*) 寺山慧君の命名です。

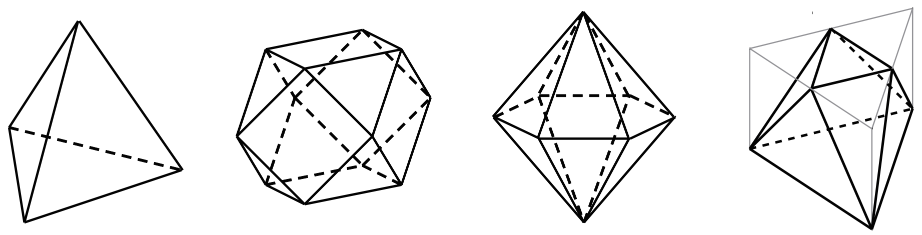
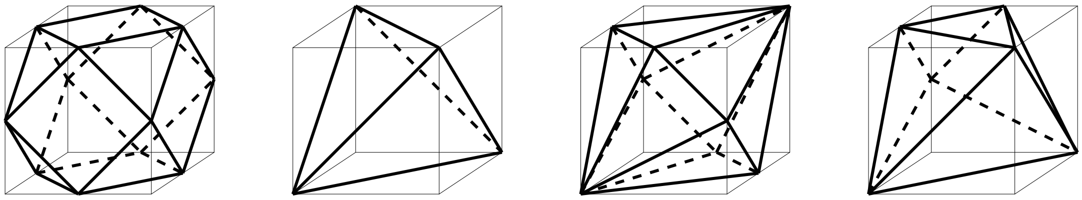


図 1: イマジナリーキューブの例：(a) 正四面体。(b) 立方八面体。(c) 底辺：高さ=2:3 の二等辺三角形の面を 12 個もつ重六角錐。(d) 辺:高さ$=4:\sqrt{6}$ の正三角錐の片方の底面の各頂点の周りを切ってできた反三角錐台。

これらの立体は、図 2 の様に、立方体の箱に入れることができます。そして、箱の各面方向から立体を見ると正方形に見え、イマジナリーキューブであることが一目瞭然です。



(a) (b) (c) (d)

図 2: 図１のイマジナリーキューブの箱に入れ方（＊編集注＊　図１とは異なるページに置いてください。）

直交した３方向から見て正方形に見える立体には、正八面体や菱形十二面体もあります。正八面体は、３つの座標軸上で原点から同じ距離の６点に頂点をとることによって得られるので、頂点の方向から見て正方形に見えます (図 6(b) 参照)。また、これらの正方形を底面とする３つの角柱の交わりをとると、菱形十二面体になります。この立体も、直交する３方向から正方形に見えます。しかし、これらは立方体の時と正方形の傾きが異なっています。ここでは、立方体と同じ様に、直交した３方向のそれぞれから射影した時、残りの２方向と平行な辺を持つ正方形になる立体だけをイマジナリーキューブと呼ぶことにします。

筆者は、イマジナリーキューブに興味を持って考えているうちに、極小凸イマジナリーキューブやフラクタル・イマジナリーキューブの分類ができることや、図１の (c) と (d) の立体がとても面白い性質を持っていることに気が付きました。そして、これらを用いた立体造形を作ったり、パズルを考案したり、また、小学校から大学まで、様々なところでこれらを教材にした授業をしてきました。この連載では、イマジナリーキューブの面白さを、多面的にお伝えできればと思っています。

2　極小凸イマジナリーキューブ

イマジナリーキューブは、立方体を削ることにより作られます。よって、立方体を固定して、ある立方体Ｃと同じ正方形の射影を３方向でもつ立体のことをＣのイマジナリーキューブと定義し、それについてまず考えましょう。Ｃのイマジナリーキューブは Ｃを削ってできますが、その時、平面で削るようにすると凸なイマジナリーキューブが得られます。その中でも、これ以上削るとＣのイマジナリーキューブでなくなるような限界の立体を考え、そのような立体をＣの極小凸イマジナリーキューブと呼ぶことにします。図２の立体は、それぞれ、図中の立方体の極小凸イマジナリーキューブです。

ある立体ＰがＣの凸イマジナリーキューブであることの必要十分条件は、Ｃの全ての辺が、Ｐとの共通部分を持つことだとすぐに分かります。とすると、Ｐが極小凸の時には、ＰはＰとＣとの共通部分の凸胞になり、それは多面体です。よって、極小凸イマジナリーキューブは多面体です。さて、極小凸イマジナリーキューブ上に以下の同値関係を考えましょう。これは、例えば、(d) の立体において、辺上にある頂点を辺上で少し動かしても極小凸イマジナリーキューブですが、そのようなものを同じとみなす同値関係です。まず、極小凸イマジナリーキューブＰは多面体なので、６つのＣの面方向からＰを見た時に、正方形の多角形への分割が見えるはずです。これらの正方形の分割は、正方形の４つの頂点とそれ以外の見えているＰの頂点を頂点集合とするグラフを形作っています。そのグラフが正方形の４つの頂点を保存するグラフの同型相写像で移りあうとき、正方形の分割が同値であると定義します。そして、６方向全てにおいて正方形の多角形への分割が同値である時に、２つのＣの極小凸イマジナリーキューブが同値であると呼ぶことにします。さて、この同値関係に関して、Ｃの極小凸イマジナリーキューブは何種類あるでしょうか？

ＰはＣの極小凸イマジナリーキューブとします。Ｐの頂点は、Ｃの頂点であるか、Ｃの辺の両端以外の点かどちらかです。前者を頂-頂点、後者を辺-頂点と呼ぶことにします。あるＣの辺上に辺-頂点 p とそれ以外の頂点があったとすると、p を除いて凸胞をとっても凸イマジナリキューブになるので、Ｐの極小性に反します。よって、あるＣの辺上にＰの頂点が2個ある時には、それらはその辺の両端の頂-頂点です。また、辺-頂点は、頂-頂点がない辺上に１つづつ存在することになります。

このことより、頂-頂点の配置を決めれば、頂-頂点の存在しない辺上に辺-頂点を１つづつとることにより、極小凸イマジナリーキューブができます。この辺-頂点の位置を変えても同値類は変わりませんし、また、異なる頂-頂点の配置から作られる極小凸イマジナリーキューブは同値になりません。よって、Ｃの極小凸イマジナリーキューブの同値類のかわりに、頂-頂点のなす集合を考えればいいことになります。

ここで注意が必要なのは、Ｃの頂点集合のどの部分集合からでも極小凸イマジナリーキューブを作れる訳ではないことです。ある頂点とその隣の３つの頂点が全て選ばれれば、真ん中の頂点を除いたものも凸イマジナリーキューブになってしまうので、極小性に反します。一方、そのような組み合わせを含まない選び方にからは、極小凸イマジナリーキューブができます。よって、この条件を満たす立方体の頂点の選び方を考えればよいことになります。それを、Ｃの回転で同値になるものを除いて数え上げたのが表１です。この表では、各種類の代表のイマジナリキューブは、辺の中点を辺-頂点としています。この表の中で、(No. 10 L) と (No. 10 R)

は鏡像関係にあります。それ以外はC-頂点のとりかたがに対称面が存在するので、代表のイマジナリキューブも面対称です。このように、Cのイマジナリーキューブは、Cの回転で同値なものも同値とみなすと16種類、さらに、Cの鏡像で同値なものも同値とみなすと１５種類あることが分かりました。

さて、ある立方体の極小凸イマジナリーキューブになっている立体を極小凸イマジナリーキューブとよぶことにしましょう。ここで注意しないといけないことがあります。ある立体が、２つの立方体のイマジナリキューブになることがありえるのです。後で丁寧に述べますが、実際、(No. 5)の立体は図１の (c) ですが、６０度回転させても立方体に入ります。しかし、そのようなことは、No.5 の同値類の中でしか起きないことが分かります。よって、極小凸イマジナリーキューブも同じように同値類に分類できます。そして、回転で同値なものも同値とみなすと16種類、さらに、鏡像で同値なものも同値とみなすと１５種類あることになります。

この１６種類の極小凸イマジナリーキューブを、多面体木工の専門家である、中川宏氏（積み木インテリアギャラリーいたち丸）に木工で作って頂きました（図3)。木の重みと質感があり、正確に作られていて、形の美しさが際立ちます。また、京都大学総合博物館のロビーなどで、イマジナリーキューブを透明な箱に入れるパズル展示を行ってきましたが、なかなか好評です(*) これは、それほど簡単ではなく、多くの人は試行錯誤を繰り返しますが、箱にすっと入っていく瞬間に満足度がありますし、いったん箱に入ると、３方向から見て正方形に見えることが一目瞭然となって驚きがあります。それが不思議なもので、箱から出すと、どのように正方形に見えていたのかまた分からなくなります。人間の目と脳は、たとえ片目をつぶっても、常に３次元的な形を把握しようとする存在で、射影像の２次元の形には興味が薄いようです。

(∗) ある時、目の不自由な人が、論理的に考えながら、正四面体をいとも簡単に箱に入れたのに驚きました。目が見えると、視覚に頼ってしまい、かえって形がとらえにくくなる気がします。

3　重六角錐と反三角錐台

この 16 種類の中には、１番の立方八面体、１３番の正四面体、１６番の反三角柱といった、きれいな立体が存在します。これらは、辺-頂点だけか、頂-頂点だけでできている極小凸イマジナリーキューブです。

これら以外に、特に面白い立体が２つ存在します。

図２（ｃ）と表 1(No.5) は同じ立体で、六角錐を２つ底面で貼り合わせた十二面体（重六角錐）です。これは、図２（ｃ）の様に、面の方向から見て正方形に見え、どの面も対称的です。つまり、12 個のどの面の方向から見ても正方形に見えます。角柱、角錐以外に、反対方向も含めて 12 方向から正方形に見える立体があることに驚きませんか？この立体は、２つ

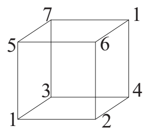
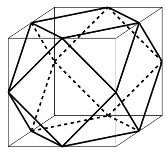
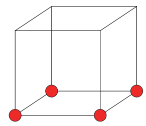
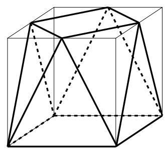
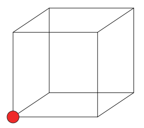
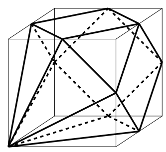
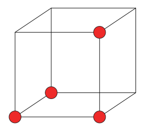
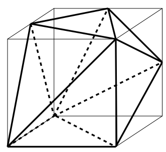
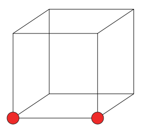
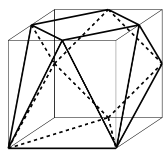
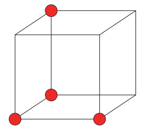
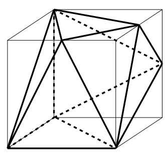
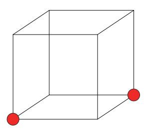
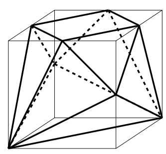
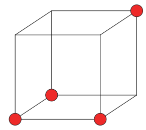
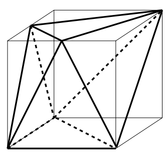
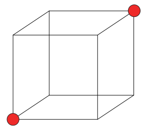
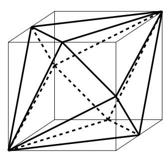
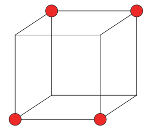
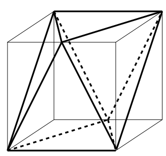
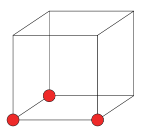
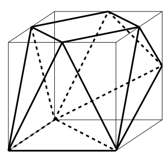
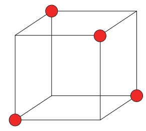
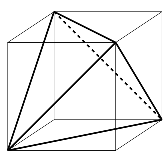
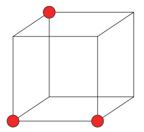
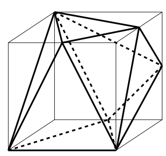
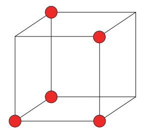
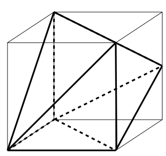
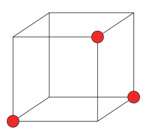
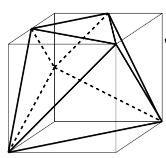
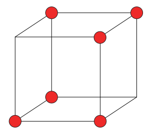
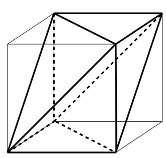
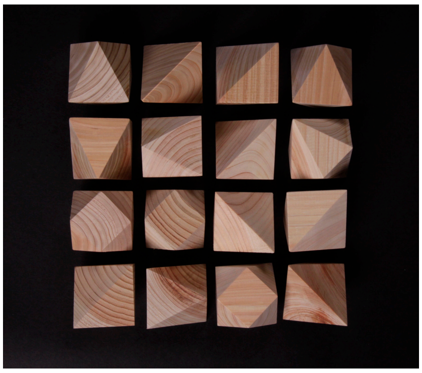
番号 (面の数, 頂点の数)	立方体の頂点集合	イマジナリーキューブ			
1 (14,12) 立方八面体	 {}		9 (10,8) 反四角錐台	 {1, 2, 3, 4}	
2 (13,10)	 {1}		10(L) (10,7)	 {1, 2, 3, 6}	
3 (12,9)	 {1, 2}		10(R) (10,7)	 {1, 2, 3, 7}	
4 (11,8)	 {1, 4}		11 (8,6)	 {1, 2, 3, 8}	
5 (12,8) 重六角錐	 {1, 8}		12 (8,6)	 {1, 2, 7, 8}	
6 (11,8)	 {1, 2, 3}		13 (4,4) 正四面体	 {1, 4, 6, 7}	
7 (10,7)	 {1, 2, 7}		14 (8.6)	 {1, 2, 3, 6, 7}	
8 (8,6) 反三角錐台	 {1, 4, 6}		15 (8,6) 反三角錐	 {1, 2, 3, 6, 7, 8}	

表 1: 16 種類の極小凸イマジナリーキューブ



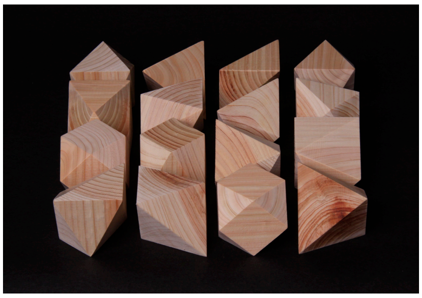


図 3: 木工による、16 種類のイマジナリーキューブ。

の方法で立方体の箱に入れることができます。つまり、二つの立方体のイマジナリーキューブになっています。そのような立体を、ダブルイマジナリーキューブと呼ぶことにします。ダブルイマジナリーキューブは、No. 5 の同値類だけに存在します。それは、立方体と、その相対する頂点を固定して回してできた立方体の共通部分として得られます。よって、それらは極小でもあり、極大でもあります (図 4)。

図 2(d) と表 1(No.8) も同じ形です。これは、図 2 が示すように、正三角柱の 3 つの頂点を切り落としてできた立体です（反三角錐台）。また、少し計算すると、相対する頂点を結ぶ 3 つの直線が一点で交わり、お互いに直交することが分かります。この交点までの長さの比は、２：１です。よって、4 つの頂点は同一平面上にあり、その平面での切り口は、図 5 のようになります。

また、このことより、3 つの座標軸の原点から等距離の 6 点を選ぶと正八面体ができますが、反三角錐台は、図 6 のように、座標軸の負のところでは正の所の 2 倍の距離の所を選んでできた八面体だと分かります。

しかも、この長い方の長さは、この立体を囲む立方体の 1 辺の長さ (つまり、図 5 の 2 の長さ) と一致してます。よって、この立体は、立方体の箱におさまりますが、それだけではなく、立方体の格子を考えた時、その頂点のまわりにも自然におさまります。このことは、次回以降の空間充填

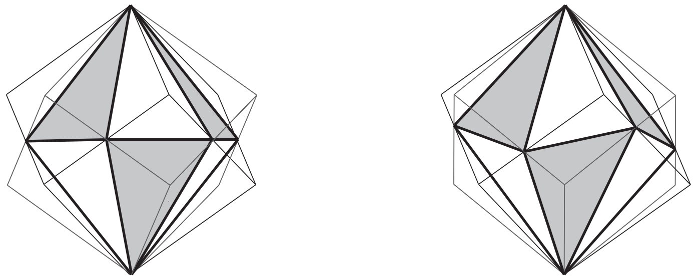


図 4: ダブルイマジナリーキューブ。片方の立方体は、もう片方を (a) ６０度 (b) ４２度回転させたもの。

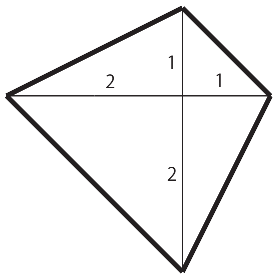


図 5: 反三角錐台イマジナリーキューブの、４つの頂点を通る切断面。

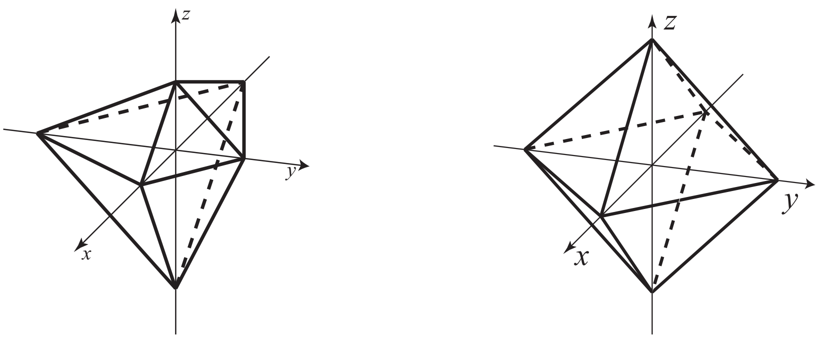
の話や、この立体を用いた造形の話、パズルの話で重要な役割を果たします。

参考文献：

Hideki Tsuiki, Imaginary Cubes-Objects with Three Square Projection Images. Bridges Conference Proceedings, 159-166, 2010.

Hideki Tsuiki, SUDOKU Colorings of the Hexagonal Bipyramid Fractal. In Proceedings KyotoCGGT 2007, LNCS 4535, pp.224-235, 2008.

Hideki Tsuiki, Does it look square? Hexagonal Bipyramids, Triangular Antiprismoids, and their Fractals. in Bridges Conferenced Proceedings, 277–287, 2007.



(a) (b)

図 6: (a) 反三角錐台イマジナリーキューブ; (b) 正八面体