イマジナリーキューブ（2）

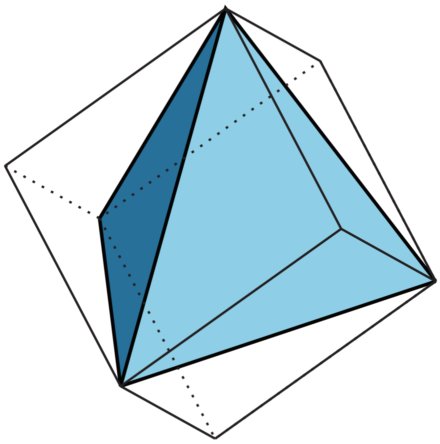
立木 秀樹

前回、立方体と同じように直交する３方向から正方形に見える立体のことをイマジナリーキューブと定義しました。そして、極小凸イマジナリーキューブが１６種類あることを述べ、それらの代表元となる１６個の極小凸イマジナリーキューブを紹介しました。これら１６個の型紙は、私のホームページ（参考文献 [1]）にて公開しています。興味のある人は、是非、自分で作ってみてください。

今回は、フラクタル・イマジナリーキューブについて考えます[1]。そして、イマジナリーキューブを用いて制作したオブジェを紹介します。

1　シェルピンスキー四面体

前回お話したように、正四面体 S_0 はイマジナリーキューブです。そのことは、立方体の箱に入れて考えれば一目瞭然です。

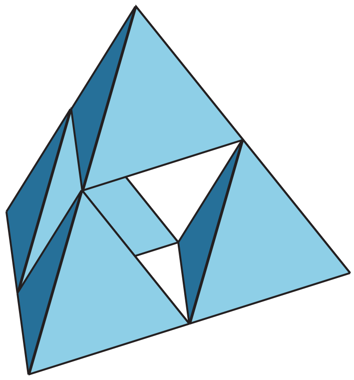


それに対して、４つの頂点それぞれを中心に 1/2 に縮小する写像 f_1 から f_4 に対して、図形を図形に写す写像

$$G(X) = f_1(X) \cup f_2(X) \cup f_3(X) \cup f_4(X)$$

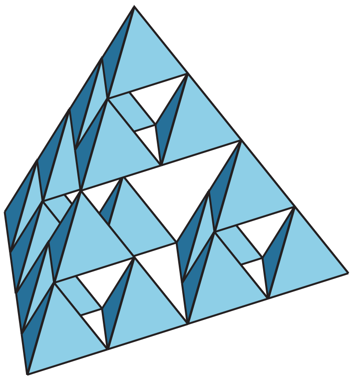
を考えます。$S_1 = G(S_0)$ は、図のようになります。

[1] 2006 年 4,5,10 月号の「フラクタルマジック」の連載で扱っていた内容と一部重なることをご了承ください。

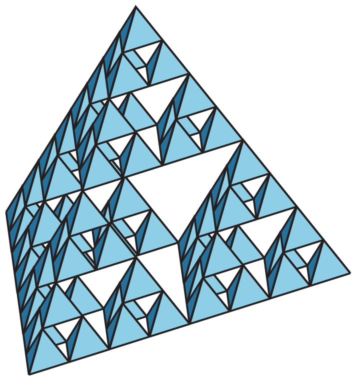


S_1

これも、辺方向から射影すると4つの正方形が2倍の大きさの正方形をうめつくす形になり、イマジナリーキューブになっています。さらに、同じ操作を何回も繰り返し適用して、立体 $S_2 = G^2(S_0)$, $S_3 = G^3(S_0), \ldots$ を作っていきます。S_i はどんどん小さくなっていきますが、どの S_i も同じ3つの正方形に射影されるイマジナリーキューブです。このことは数学的帰納法で示せます。



S_2



S_3

さらに、この操作を無限に繰り返した極限の立体 S、すなわち

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

を考えます。これは、シェルピンスキー四面体（あるいは3次元版シェルピンスキーガスケット）と呼ばれる立体図形です。$S = G(S)$ であり、シェルピンスキー四面体に対して G の操作を行っても元に戻ります。このように、相似縮小したものいくつかを合わせて元の図形にもどる図形のことを、自己相似図形（あるいは、より一般的にフラクタル図形）といいます。シェルピンスキー四面体は、代表的なフラクタル立体図形です。自己相似図形に対しては、$1/k$ に縮小したもの n 個集めて元に戻る時に $log_k n$ 次元と定義され

た相似次元が考えられます[2]。相似次元は、開集合条件という、縮小像が" 境界" 以外で重なっていないことを示す条件を満たす時には、代表的なフラクタル次元であるハウスドルフ次元と一致することが知られています。一般にハウスドルフ次元は整数以外の値を取り得ますが、シェルピンスキー四面体は、1/2 の縮小像 4 つからできているので 2 という整数値になっています。図形のなす空間はハウスドルフ距離という距離で距離空間となり、この距離で S_i は S に収束しているのですが、このことと射影が連続な写像であることから S も正方形に射影されることが分かります。すなわち、シェルピンスキー四面体もイマジナリーキューブになっています。

さて、このように、シェルピンスキー四面体はハウスドルフ次元が 2 のフラクタル・イマジナリーキューブです。一般に、射影を行うとハウスドルフ次元は変わらないか減るので、正方形に射影されることを考えれば、イマジナリーキューブのハウスドルフ次元は 2 以上でなくてはなりません。つまり、ハウスドルフ次元が 2 のフラクタル・イマジナリーキューブは、その中でももっとも小さい次元をもつものです。

2　フラクタル・イマジナリーキューブ

ハウスドルフ次元が 2 のフラクタル・イマジナリーキューブは他に存在するのでしょうか。ここでいうフラクタルは、自己相似集合、すなわち、相似縮小写像 $f_1, \ldots, f_n$ に対し、図形を図形に写す写像

$$G(X) = f_i(X) \cup \ldots \cup f_n(X)$$

の不動点、つまり、$X = G(X)$ を満たす図形のこととします。ここではさらに、f_i の縮小率は全て同じ数 $1/k$ であり、f_i は回転を行わない縮小写像の場合に限って考えることにします。ハウスドルフ次元が 2 なので、$n = k^2$ です。

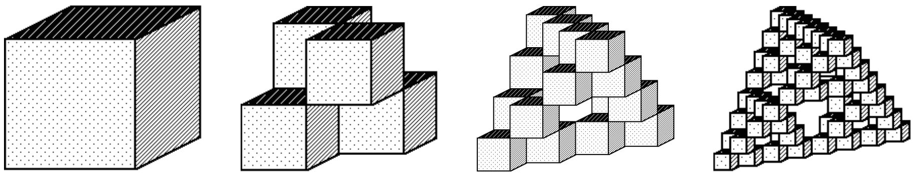
先ほど、シェルピンスキー四面体を定義するのに、四面体 S_0 から初めて

$$S_0, G(S_0), G^2(S_0), \ldots$$

という図形の列を考えましたが、フラクタルの一般論によると、どんな図形 S_0 から始めても、この列は G の定義するフラクタル図形 S に近づいていきます。しかも、S_0 が S を含む場合には、この図形の列は単調に小さくなって、$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} G^n(S_0)$ となります。

今考えているのは S がイマジナリーキューブの場合なので、S がおさまる立方体 C が存在します。S がシェルピンスキー四面体の時に C を最初の立体にとると、この列は図 1 のようにシェルピンスキー四面体に近づいていきます。

[2]正方形は 1/2 の縮小像 4 つで元に戻るので 2 次元、立方体は 1/2 の縮小像 8 つで元に戻るので 3 次元という次元の概念の一般化です。



. . .

C　　$G(C)$　　$G^2(C)$　　$G^3(C)$

図 1: シェルピンスキー四面体の立方体近似

一般の場合で考えてみましょう。最初の近似 $G(C)$ に着目すると、$G(C)$ は k^2 個の立方体からなりますが、全て C に含まれており、また、$G(C)$ がイマジナリーキューブ S を含んでいることから、３つの面方向どちらから見ても、$G(C)$ を構成する k^2 個の立方体は、お互いに重なりなく、全て見えてなければなりません。つまり、これら k^2 個の立方体は、C を $k\times k\times k$ に分けた k^3 個の立方体から k^2 個を、列、行、深さのどの方向にも重なりがないように選んでできたイマジナリーキューブになっています。また、$G(C)$ がイマジナリーキューブであることから、帰納的に、$G^2(C), G^3(C), \ldots$ も イマジナリーキューブになることが言えます。そして、その極限のフラクタル立体もイマジナリーキューブです。

まとめると、立方体を $k\times k\times k$ に切ってできた k^3 個の小さな立方体から k^2 個を、３方向どちらから見ても全て見えるようにとる取り方に対応して、ここで考えるフラクタル・イマジナリーキューブは存在していることになります。

$k=2$ の時には、そのような配置は、立体の回転で同じになるものを同一視すると、図１の１段目の１通りだけしかありません。そして、それにより生成されるフラクタルがシェルピンスキー四面体でした。

$k=3$ の時には、図２の (H) と (T) の２通りだけがあることがわかります。

さて、これらの配置から生成されるフラクタルはどんな形になるでしょうか?

3　重六角錐と反三角錐台のフラクタル

シェルピンスキー四面体は、通常、立方体から始めて図１の極限として考えるのではなく、正四面体から始めた近似の極限として考えます。上記の (H) と (T) で生成されるフラクタルに対しても、そのような、近似を考えるうえで自然な凸多面体があるでしょうか。そのような多面体として、そのフラクタルを内部に持つ最少の凸多面体、すなわち、凸胞を考えましょう。イマジナリーキューブの凸胞をとっても当然イマジナリーキューブになります。さて、この２つのフラクタルの凸胞はどんな多面体でしょうか？

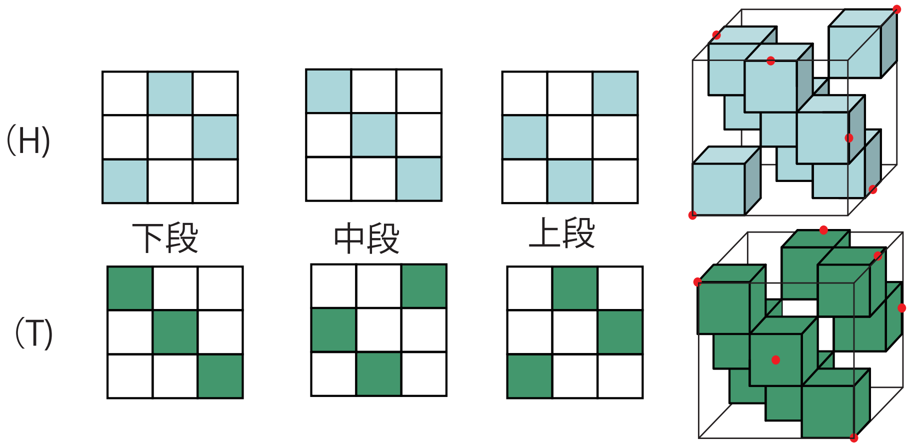
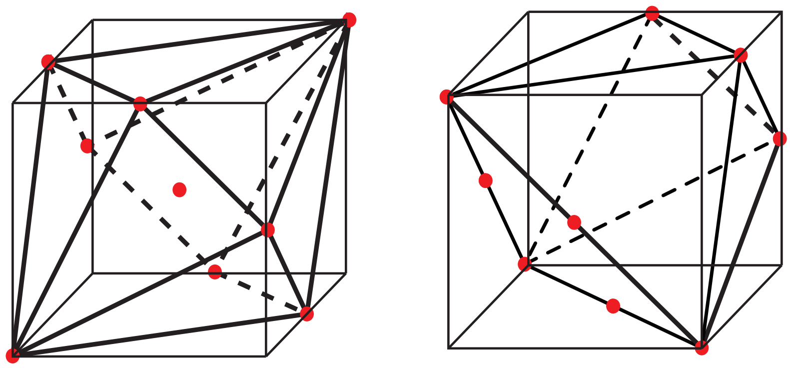
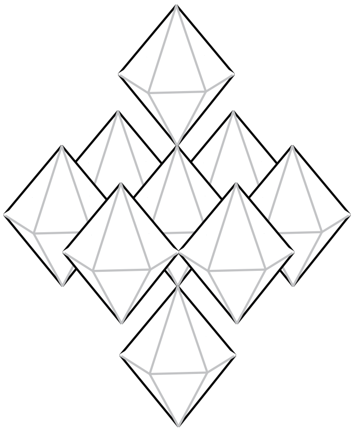


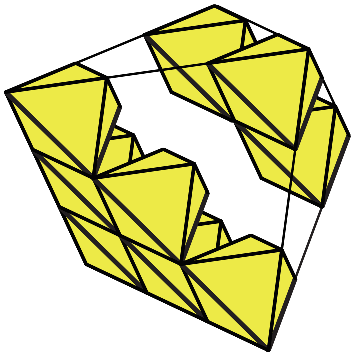
図 2: ３方向で正方形に見える９個の立方体の配置

このフラクタルの場合には縮小写像が回転を含んでいないので、凸胞をとるのは簡単です。単に９つの縮小写像の不動点のなす集合の凸胞と一致しています。それぞれの縮小写像の不動点は、図 2 に印をつけてます。これらの集合の凸胞をとってやると、前回、多くの面白い性質を持った重要なイマジナリーキューブとして紹介した２つの多面体である、重六角錐イマジナリーキューブと反三角錐台イマジナリーキューブが現れます。



不動点は、(H) では重六角錐の８つの頂点と中心、(T) では反三角錐台の６つの頂点と大きな三角形の辺の中点になっています。よって、(H) と (T) が生成するフラクタルは、それぞれ、重六角錐と反三角錐台を始めの立体として、これら９つの点を中心とした 1/3 の縮小像の和をとるという操作を繰り返した極限です。重六角錐と反三角錐台を基本立体とした、(H) と (T) のイマジナリーキューブの１次近似の絵を載せておきます。



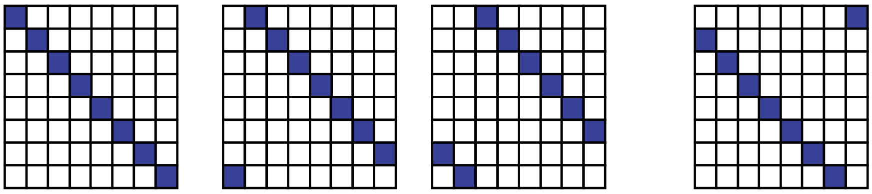


これらのフラクタルを３次元空間内で回転させると、正方形だけでなく、いろんな姿を見せてくれます。フラクタルマジック（３）(数学セミナー 2006 年 10 月号) にたくさん絵を載せてありますので、参考にしてください。また、この２つを含め、n が 5 までで生成される全てのフラクタル・イマジナリーキューブを３次元空間内で回転させながら見るアプレットが私のホームページ [1] にあるので、そちらもご覧ください。

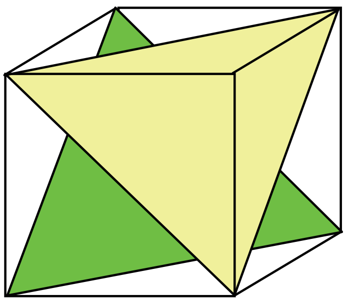
前回、重六角錐イマジナリーキューブは、２つの立方体に対するイマジナリーキューブ（ダブルイマジナリーキューブ）になっており、６つの面方向の方向の射影で正方形になるとお話しました。(H) の重六角錐フラクタル・イマジナリーキューブも、その近似立体もダブルイマジナリーキューブになっており、同じ６方向の射影で正方形になります。(T) の反三角錐台フラクタル・イマジナリーキューブは、１次近似を見ればわかるように、連結ではありません。同じような構造が繰り返されるので、カントール集合的なスライスの集まりになります。

4　少年と狼

プログラムを組んで調べると、$k = 4$ の時の 16 個の立方体の配置は、立体の回転と鏡像を同一視して 36 通りあることが分かります。その中には、シェルピンスキー四面体の２次近似も含まれます。それ以外にも面白いものがありますが、次回の話に関係があるので、その時紹介します。$k = 5$ の時は、３４８２種類あり、k を増やしていくと爆発的に個数は増えていきます。もはや網羅的に見ることは不可能です。そこで、全ての k で現れる特徴的な配置として、図のように、各段の並びが１つづつずれていく k^2 個の立方体の配置 (R_k) を考えましょう。



$k=3$ の時の (R_3) は、(T) と一致します。配置 (R_k) から作られるフラクタルを F_k とします。$F_2, F_3, \ldots$ の列はハウスドルフ距離に関してコーシー列をなしています。このことは、F_k が (R_k) の立方体の集まりに含まれていることから分かります。一方で、イマジナリーキューブの列のハウスドルフ距離による収束先は、またイマジナリーキューブになります。さて、F_k $(k=2,3,\ldots)$ の収束先はどんな立体でしょうか？それは、$(R_k)(k=2,3,\ldots)$ の収束先とも等しくて、図のような、立方体の箱に正三角形を２枚入れたものになります。



この２つの三角形に囲まれた部分は、前回１６種類のイマジナリーキューブを紹介しましたが、その最後のもの (No. 15) です。実は、この三角形２枚だけでイマジナリーキューブだったのです。

そのことを応用して、当時同志社女子大学の学生だった井原 有美子さんに絵を描いてもらい、「少年と狼」というオブジェを制作しました。正三角形の２枚の紙には、狼と少年の絵が描かれていて、正方形に見える３方向から見ると、見る方向によって、少年が狼を狙っていたり、逆に狼が少年に襲いかかろうとしていたりします。裏面には、３方向から見てカメレオンとキツネと蜂の絵が現れる絵が描かれています。

5　６つの写真の見えるオブジェ

(H) と (T) の９つの立方体からなる立体は、重六角錐と反三角錐台という２つの重要なイマジナリーキューブと関係しており、興味がそそられます。また、これら自体がイマジナリーキューブであり、しかも、反対方向も含めて６方向から見た時に見える面が全て異なります。そのことを利用して、各立方体の６面に写真の一部を貼って、６つの面方向から見た時に６つの異なる写真が現れるオブジェを作りました。(H) のオブジェでで１点でしか連結し

図 3: 少年と狼

ていない２つの立方体を、面の向きを合わせながらいかにつなげるか腐心しました。のりやセロハンテープを使わずに、はめ込みだけで制作できるようになっています。多少厚い紙の両面に、位置を正確に合わせて印刷しないといけないので難しいですが、型紙は私のホームページにあるので、興味のある方は作成してみてください。

6　スウドクオブジェクト

重六角錐フラクタルの話に戻ります。この立体の２次近似の模型を作りました (図 5)。この２次近似は８１個の重六角錐からなり、正方形に見える時には 9×9 の格子状に各ピースが配置されています。これはまさに、スウドクパズルの格子ではないですか！そこで、８１個のピースに９色で色づけをして、9×9 の格子になる（反対も含めて）１２個のどの方向から見た時にも、スウドクの解のように９色全てがどの列にも行にもブロックにも表れるように色づけしました。ちょうど、フラクタルの国際会議 (Mathematics on Fractals 2006) が京都で開催中であり、主催者の木上先生のご厚意で展示ができることになったので、急遽、組み立てを学生に手伝ってもらい仕上げま

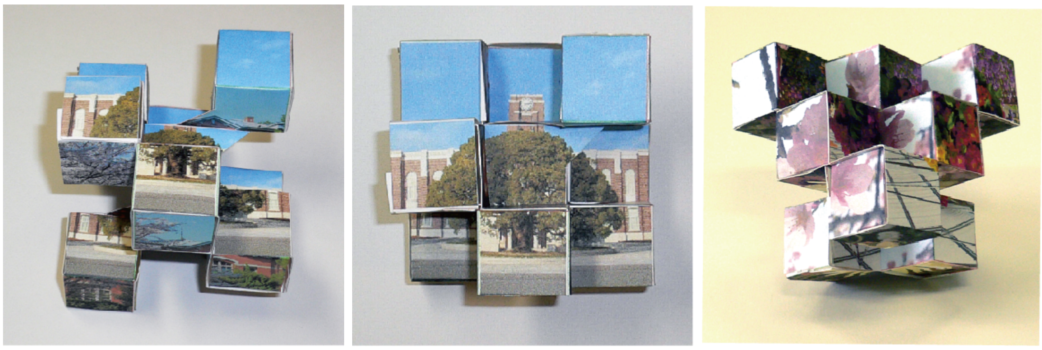


図 4: ６方向から違う写真が見える２つの立体

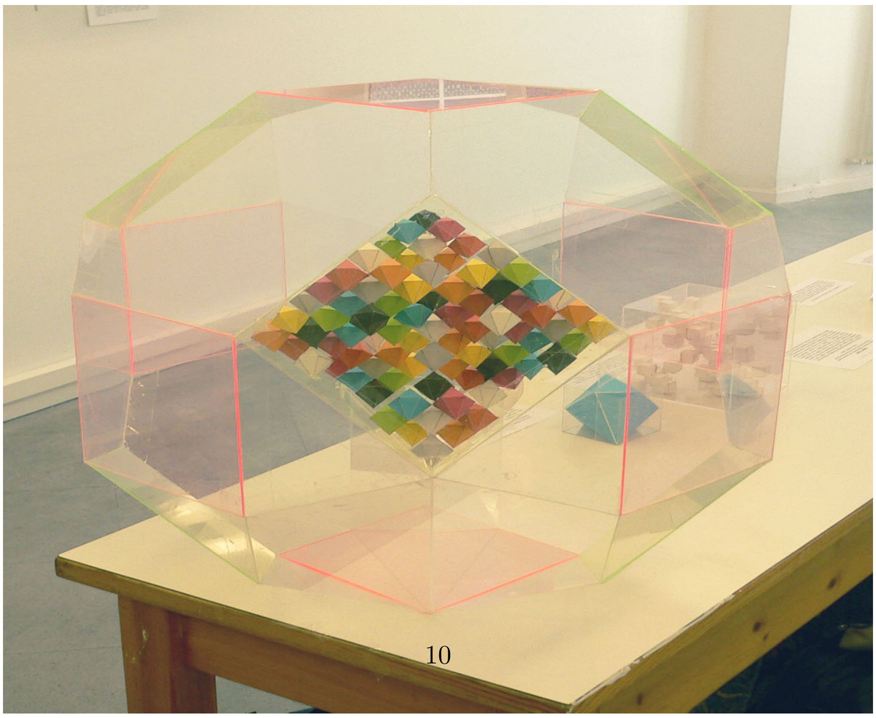
した[3]

こういう色づけは、プログラムを組んで調べてみたところ、色の入れ替えで一致するものを同一視して１４０種類、立体の回転も同一視して３０種類、さらに鏡像も同一視すると１５種類あります。１５種類をながめていると、２つは規則的なパターンで形成されていて、特に、その片方は対称性が高くあとの１３種類は、それに対してスウドク解であることを保つようなブロックの入れ替えをすることによってできていることが分かりました。このオブジェは、この対称性の高いパターンで色づけされています。１５個しかないことは、後に、プログラムを使わずに、まさにこの立体スウドクパズルを解くように説明することができました。そのことと、任意の n に対して $2n$ 次近似立体に対してもスウドク解があることの証明と合わせて、論文を書きました（参考文献 [2]）。

その後、京都大学博物館のロビーに展示させてもらったのですが、展示台に入れて置いたのでは、誰も見向きもしません。そのような面白い立体だとは気がついてくれないのです。説明をつけても、ほとんど読んでもらえません。そこで制作したのが、この立体を囲む透明な多面体です。この３２面体は正方形の面を１２個もっており、その面から見れば、正方形にぴったり収まるように、この立体が見えます。これは、数独オブジェの凸胞となる重六角錐の３倍の大きさの重六角錐を考え、その各面の真ん中に正方形を描いて、その凸胞をとった形です。正方形の面は２色で薄く色の入った透明アクリルを用いて、自然に目がいくようにしました。

[3]当時大学院生の、杉原 佳次君と増田 要平君に主に手伝ってもらいました。

図 5: 数独オブジェクトをいろんな方向から撮った写真



それから３年間博物館で展示をさせて頂きましたが、好評だったと自負しています。四角く見えると気が付いた時に人々が見せてくれる驚きの表情は忘れられません。このオブジェは、２００７年にスペインのサンセバスチャンで行われた数学と芸術に関する会議 (Bridges 2007) で発表、展示をして来ました。この会議については、次回紹介したいと思います。

[1] 筆者ホームページ `http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki`

[2] Hideki Tsuiki, SUDOKU Colorings of the Hexagonal Bipyramid Fractal. In Proceedings KyotoCGGT 2007, LNCS 4535, pp.224-235, 2008.