Quasi-Polish 空間の
計算可能位相空間論への応用

Matthew de Brecht　（マシュー・ディブレクト）

京都大学大学院　人間・環境学研究科
matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp

SAML 2024 (2024 年 7 月 9 日〜12 日)

Introduction

- Quasi-Polish 空間はある種の完備性をもつ第二可算位相空間のクラスである。
- 計算可能位相空間論 (computable topology) は、位相空間の間の関数の計算可能性を研究する分野である。
  - 計算可能解析学という呼び方の方が一般的であるが、ここでは解析学に現れないような空間も扱うため上記の呼び方にする。
  - もっと一般的に、表現付き空間 (represented space) の間の関数の計算可能性について議論することもある。

Table of Contents

Quasi-Polish 空間

Quasi-Polish 空間の 3 つの同値な特徴付けを紹介する:

1. 一般化したポーランド空間として
   (As generalized Polish spaces)
2. 幾何的命題論理の可算的理論として
   (As countably axiomatized propositional geometric theories)
3. イデアル空間として
   (As spaces of ideals)

1. 一般化したポーランド空間として

- 集合 X 上の 準距離 (quasi-metric) とは次の 2 つの条件を満たす関数 $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ のことである。
  1. $x = y \iff d(x, y) = d(y, x) = 0$
  2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

  (X, d) を準距離空間と呼ぶ。
- (X, d) は開球 $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ $(x \in X,\ \varepsilon > 0)$ から生成される位相を持つ。
- (X, d) の点列 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ がコーシー列であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(\exists n)(\forall j \geq i \geq n)\ d(x_i, x_j) < \varepsilon$ が成り立つことである。
- (X, d) の任意のコーシー列 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対し $\lim_{i \to \infty} \max\{d(x_i, x), d(x, x_i)\} = 0$ を満たす $x \in X$ が必ず存在するとき、(X, d) を完備準距離空間という。

Definition

第二可算な完備準距離空間に同相な位相空間を quasi-Polish 空間と呼ぶ。

基本結果

- 任意の T_0 第二可算空間を quasi-Polish 空間に埋め込める。
- 「ポーランド空間」と「距離化可能 quasi-Polish 空間」は同値である。
  - 従って、有理数の部分空間 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ は quasi-Polish ではない。
- 第二可算局所コンパクト sober 空間は quasi-Polish である。
- ポーランド空間における記述集合論のほとんどが quasi-Polish 空間に自然に一般化する。例えば、
  - 任意の quasi-Polish 空間はベール空間である (可算個の稠密開集合の交わりは稠密である)。
  - Quasi-Polish 空間 X の部分空間 A が quasi-Polish になるための必要十分条件は $A \in \mathbf{\Pi}^0_2(X)$ である。
    - $A \in \mathbf{\Pi}^0_2(X)$ とは、$x \in A \iff \forall i \in \mathbb{N}.(x \in U_i \Rightarrow x \in V_i)$ となる開集合列 $U_i, V_i \subseteq X$ $(i \in \mathbb{N})$ が存在することである。
  - 任意の quasi-Polish 空間 X と Y とボレル可測関数 $f\colon X \to Y$ に対し、f が連続になるような X 上のより細かい quasi-Polish 位相が存在する。

2. 幾何的命題論理の可算的理論として

- 幾何的命題論理式は命題変数、定数 $\top$ と $\bot$、有限論理積 $\wedge$、無限論理和 $\bigvee$ から生成される。
  - 任意の幾何的命題論理式は $\bigvee_{i\in I} a_0^i \wedge \cdots \wedge a_{n_i}^i$ という形の論理式と同値である（ただし、a_j^i は定数または命題変数である）。
- 幾何的命題論理式のシークエント $\phi \vdash \psi$ からなる集合 $\mathcal{T}$ を幾何的命題論理の理論という。
  - $\mathcal{T}$ に含まれている命題変数とシークエントの個数が両方とも可算であるとき、$\mathcal{T}$ を可算的理論という。
- 推論規則 (P. Johnstone または S. Vickers を参照):
  - $\phi \vdash \phi$ (identity)
  - $\dfrac{\phi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \chi}{\phi \vdash \chi}$ (cut)
  - $\phi \wedge \bigvee_{i\in I} \psi_i \vdash \bigvee_{i\in I}(\phi \wedge \psi_i)$ (distributivity)
  - $\phi \vdash \top$
  - $\phi \wedge \psi \vdash \phi$
  - $\phi \wedge \psi \vdash \psi$
  - $\dfrac{\chi \vdash \phi \qquad \chi \vdash \psi}{\chi \vdash \phi \wedge \psi}$ $(\wedge I)$
  - $\bot \vdash \psi$
  - $\phi_j \vdash \bigvee_{i\in I} \phi_i$ ($j \in I$ のとき)
  - $\dfrac{\phi_i \vdash \psi \ (\text{各 } i \in I)}{\bigvee_{i\in I} \phi_i \vdash \psi}$ $(\vee I)$

- 導出の例:

$$\dfrac{\phi \wedge \psi_j \vdash \phi \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi_j \vdash \psi_j \qquad \psi_j \vdash \bigvee_{i\in I} \psi_i}{\phi \wedge \psi_j \vdash \bigvee_{i\in I} \psi_i}\,(\text{cut})}{\dfrac{\phi \wedge \psi_j \vdash \phi \wedge \bigvee_{i\in I} \psi_i \quad (\text{各 } j \in I)}{\bigvee_{i\in I}(\phi \wedge \psi_i) \vdash \phi \wedge \bigvee_{i\in I} \psi_i}\,(\vee I)}\,(\wedge I)$$

- 理論 $\mathcal{T}$ において $\phi \vdash \psi$ を導出できるとき $\phi \leq_{\mathcal{T}} \psi$ と定義する。$\phi \equiv_{\mathcal{T}} \psi \iff \phi \leq_{\mathcal{T}} \psi$ かつ $\psi \leq_{\mathcal{T}} \phi$ と定義する。
- $\equiv_{\mathcal{T}}$ の同値類全体からなる半順序集合 $(\mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \leq_{\mathcal{T}})$ を $\mathcal{T}$ の Lindenbaum 代数という。
  - より正確には、$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ は frame と呼ばれる特殊な分配束である。

Theorem (R. Heckmann, 2015)

Quasi-Polish 空間と連続関数の圏と、可算表示を持つ frame と frame 準同型の圏は圏双対である。

従って、X が quasi-Polish 空間であれば、開集合束 $\mathbf{O}(X)$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ が同型になる幾何的命題論理の可算的理論 $\mathcal{T}$ が存在する。逆に、$\mathcal{T}$ が幾何的命題論理の可算的理論であれば、開集合束 $\mathbf{O}(X)$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ が同型になる quasi-Polish 空間 X が存在する。

基本結果

- Quasi-Polish 空間 X と幾何的命題論理の可算的理論 $\mathcal{T}$ は次の関係を持つ。
  - 論理式（の同値類）$[\phi] \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}} \iff$ 開集合 $U_\phi \in \mathbf{O}(X)$
  - $\mathcal{T}$ のモデル $M \iff X$ の点 $x_M \in X$

  ただし、$x_M \in U_\phi \iff M \vDash \phi$
- この関係より、可算的幾何的命題論理の完全性を導ける。
  - $\phi \not\leq_{\mathcal{T}} \psi$ ならば $U_\phi \not\subseteq U_\psi$ となるため $x \in U_\phi \setminus U_\psi$ が存在するが、モデル x においては ϕ が真であるが ψ は偽である。
- R. Chen (2019) がこの双対性を可算的幾何的述語論理に拡張した。
  - 幾何的述語論理の可算的理論 $\mathcal{T}$ からなる syntactic pretopos が $\mathcal{T}$ の可算モデルからなる quasi-Polish groupoid の作用を持つ quasi-Polish étalé 空間の圏と同値であることを示した。

- 幾何的命題論理の表現力は高い。例えば、古典的一階述語論理を幾何的命題論理に忠実に翻訳できる。この翻訳により、Gödel の完全性定理の（Rasiowa-Sikorski 的な）証明を得る。
  - L を可算な一階述語論理の言語とし、T を可算個の L-文の集合とする。
  - L に可算個の新しい定数記号 $c_0, c_1, \ldots$ を加えた言語を L_c とする。
  - 各 L_c-文 α に対し命題変数 $\langle\alpha\rangle$ を導入する。
  - 次の公理からなる幾何的命題論理の理論を $\mathcal{T}$ とする：
    - $\langle\bot\rangle \vdash \bot$, $\langle\alpha \vee \beta\rangle \vdash \langle\alpha\rangle \vee \langle\beta\rangle$
    - $\top \vdash \langle\top\rangle$, $\langle\alpha\rangle \wedge \langle\beta\rangle \vdash \langle\alpha \wedge \beta\rangle$
    - $\langle\exists x.\alpha\rangle \vdash \bigvee_{k\in\mathbb{N}}\langle\alpha(c_k/x)\rangle$
      ($\alpha(c_k/x)$ は α 中の x を c_k に置き換えて得られる式)
    - $\langle\alpha\rangle \vdash \langle\beta\rangle$ (古典的一階述語論理において β を $T \cup \{\alpha\}$ から導出できるとき。例えば、$\langle\alpha \wedge \neg\alpha\rangle \vdash \langle\bot\rangle$ や $\langle\top\rangle \vdash \langle\alpha \vee \neg\alpha\rangle$ など)
  - 任意の L-文 α に対し，古典的一階述語論理において T から α を導出できることと、幾何的命題論理において $\mathcal{T}$ から $\top \vdash \langle\alpha\rangle$ を導出できることが同値であることを証明できる。

Definition

- $\prec$ を $\mathbb{N}$ 上の推移関係とする。$I \subseteq \mathbb{N}$ が
  1. $I \neq \emptyset$ (I は空集合ではない)
  2. $a \prec b \in I \Rightarrow a \in I$ (I は下方集合である)
  3. $a, b \in I \Rightarrow (\exists c \in I)\,[a \prec c \,\&\, b \prec c]$ (I は有向集合である)

  を満たすとき、I を ($\prec$ の) イデアルという。
- $\prec$ のイデアル全体の集合を $\mathbf{I}(\prec)$ と表す。$\mathbf{I}(\prec)$ は開集合

$$[n]_{\prec} = \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid n \in I\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

  から生成される位相を持つ位相空間とみなす。

- 抽象的空間の点についての情報を自然数として符号化している。
  - $a \prec b$ のとき、b は a よりも情報を含んでいる。
  - 点 (point)(つまり、$\prec$ のイデアル) とは、任意に正確である無矛盾の情報の集まりである。

Theorem (d., A. Pauly, & M. Schröder, 2019)

位相空間 X が quasi-Polish 空間であることと、X が $\mathbb{N}$ 上の推移関係 $\prec$ のイデアル空間 $\mathbf{I}(\prec)$ と同相であることは同値である。

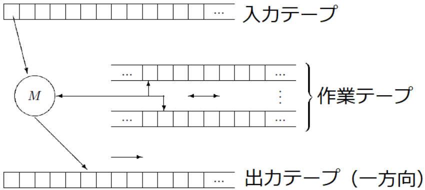
- $\mathbb{N}$ として符号化できる可算集合を利用することもある。
- 例:
  1. $\mathbb{N}$ 上の等号 $=$ からなるイデアル空間 $\mathbf{I}(=)$ は離散位相を持つ $\mathbb{N}$ と同相である。
  2. $\mathbb{N}$ の有限列全体の集合 $\mathbb{N}^{<\infty}$ 上の真の接頭辞関係を $\sqsubset$ とすれば、$\mathbf{I}(\sqsubset)$ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と同相である。
  3. $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体を $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ とし、その包含関係を $\subseteq$ とすれば、$\mathbf{I}(\subseteq)$ が Scott 位相を持つ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と同相になる。
  4. (X, d) を可分な距離空間とする。可算な稠密部分集合 $D \subseteq X$ を固定し、$D \times \mathbb{N}$ 上の推移関係 $\prec_d$ を

$$\langle x, n\rangle \prec_d \langle y, m\rangle \iff d(x, y) < 2^{-n} - 2^{-m}$$

と定義すれば、$\mathbf{I}(\prec_d)$ が (X, d) の距離完備化と同相になる。

Table of Contents

- 計算可能位相空間論（計算可能解析学）への主なアプローチは Type 2 Theory of Effectivity (TTE) (K. Weihrauch) である。
- 部分関数 $M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の計算可能性を通常のチューリング機械により定義すると同様に、部分関数 $M :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の計算可能性を Type-2 チューリング機械により定義する。
  - Type 2 チューリング機械は有限個の命令に従って操作しながら、入力テープにある無限記号列を読み込み、出力テープに無限記号列を書き込んでいく。
  - 通常のチューリング機械と違って、Type 2 チューリング機械は停止しない。ただし、出力テープに書いた記号を消したり上書きしたりすることはできない。



(Modified from “Computable Analysis”, K. Weihrauch)

- 集合 X と全射の部分関数 $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ の対 (X, ρ_X) を表現付き空間という。$x \in X$ に対し $\rho_X(p) = x$ となる $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を x の名前という。
- 表現付き空間の間の関数 $f\colon X \to Y$ に対し、$x \in X$ の任意の名前を $f(x) \in Y$ の名前に変換する Type 2 チューリング機械 M が存在するとき、f が計算可能であるという。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\rho_X"'] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\rho_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

- 例: 実数 $\mathbb{R}$ を速いコーシー表現により表現することが一般的である。実数 $x \in \mathbb{R}$ の名前は $|q_i - q_{i+1}| < 2^{-i}$ を満たす、x に収束する有理数列 $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と定義する。この表現において $+, *, -, \div, \sqrt{x}, \cos(x)$, $\sin(x), \exp(x)$ などの基本関数は計算可能である。

計算可能位相空間 (Computable topological space)

Definition

T_0 位相空間 X と関数 $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbf{O}(X)$ と c.e. 集合 $S \subseteq \mathbb{N}^3$ が

- $range(\beta) = \{\beta(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ が X の可算基底である
- $\beta(i) \cap \beta(j) = \bigcup_{\langle i,j,k\rangle \in S} \beta(k)$

を満たすとき、(X, β, S) を計算可能位相空間という。

- 愚見:「計算可能位相空間」の定義が定着しつつあるが、X がほぼ任意であるため「計算可能」と呼ぶのはやや不適切ではないか。
- 計算可能位相空間 (X, β, S) の標準表現 $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を

$$\rho_X(p) = x \iff range(p) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in \beta(i)\}$$

  と定義する。
- 計算可能位相空間の間の計算可能関数は連続である。
- 例: $\prec$ が $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係であれば

$$(\mathbf{I}(\prec), \lambda n.[n]_{\prec}, \{\langle a, b, c\rangle \mid a \prec c \,\&\, b \prec c\})$$

  が計算可能位相空間である。

Table of Contents

実効的 quasi-Polish 空間

Definition (d., A. Pauly, & M. Schröder, 2019)

- 表現付き空間 X が $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係 $\prec$ のイデアル空間 $\mathbf{I}(\prec)$ と計算可同型であるとき X を実効的 quasi-Polish 空間という。

- V. Selivanov (2015)、M. Korovina & O. Kudinov (2017)、M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, & D. Stull (2019) 等も上記と計算論的に同値な定義を提案し、quasi-Polish 空間論の実効化に多くな成果を果たしている。

計算可能関数

Definition

$\prec_1$ と $\prec_2$ を $\mathbb{N}$ 上の推移関係とする。

- 任意の部分集合 $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を部分関数のコードと呼ぶ。
- コード R に対する部分関数 $\ulcorner R \urcorner :\subseteq \mathbf{I}(\prec_1) \to \mathbf{I}(\prec_2)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \ulcorner R \urcorner (I) &= \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in I)\, \langle m, n \rangle \in R\}, \\ dom(\ulcorner R \urcorner) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec_1) \mid \ulcorner R \urcorner (I) \in \mathbf{I}(\prec_2)\}. \end{aligned}$$

Theorem

$\prec_1$ と $\prec_2$ が c.e. 推移関係であるとき、全域関数 $f \colon \mathbf{I}(\prec_1) \to \mathbf{I}(\prec_2)$ が計算可能であるための必要十分条件は $f = \ulcorner R \urcorner$ となる c.e. コード R が存在することである。

完備計算可能位相空間

- (X, β, S) が計算可能位相空間であれば、任意の埋め込み $e\colon Y \hookrightarrow X$ に対し $\gamma(i) = e^{-1}(\beta(i))$ と定義すれば (Y, γ, S) も計算可能位相空間となる。
- 従って、計算可能位相空間 (X, β, S) は唯一の実効的なパラメータ S だけでは一意に定まらない。
- この問題を解決するために次の概念を導入する。

Definition

$S \subseteq \mathbb{N}^3$ を c.e. 集合とする。計算可能位相空間 (X, β, S) が完備であるとは、任意の計算可能位相空間 (Y, γ, S) に対し

$$(\forall i \in \mathbb{N})\, \gamma(i) = e^{-1}(\beta(i))$$

を満たす計算可埋め込み $e\colon Y \hookrightarrow X$ がちょうど一つ存在することである。

注: 完備計算可能位相空間 (X, β, S) は S だけで（計算可同型を除いて）一意に定まる。

Theorem

完備計算可能位相空間は実効的 quasi-Polish 空間と同値である。
具体的に、

- $\prec$ が $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係であれば、$S = \{\langle a, b, c\rangle \mid a \prec c \,\&\, b \prec c\}$ と定義すれば、$(\mathbf{I}(\prec), \lambda n.[n]_\prec, S)$ が完備計算可能位相空間となる。
- 逆に、$S \subseteq \mathbb{N}^3$ が c.e. であれば、$(X, \lambda n.\{x \in X \mid n \in x\}, S)$ が完備計算可能位相空間となる実効的 quasi-Polish 空間 $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が存在する。

- 従って、計算可能位相空間の従来の定義は c.e. 推移関係 $\prec$ と部分集合 $X \subseteq \mathbf{I}(\prec)$ の対 $(\prec, X)$ と計算論的に同値である。
- 愚見 1: 任意の部分集合 $X \subseteq \mathbf{I}(\prec)$ を許すと「計算可能」の範囲を超えてしまう。実効的記述集合論という分野は $\mathbf{I}(\prec)$ の部分集合を実効的に定義し、その性質を研究する。
- 愚見 2: Quasi-Polish でない空間については位相空間論と Locale 理論の違いが目立つ。例えば、$(\mathbb{Q}, +)$ は $(\mathbb{R}, +)$ の部分位相群であるが、部分 Locale 群ではない。従って、quasi-Polish 空間以外の空間を含むクラスの Church-Turing Thesis は成立しにくいと予想する。

積、余積、等化子

$\prec_1$ と $\prec_2$ を $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係とする。計算可全単射 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を固定する。

- 積 (products): 推移関係 $\prec^{\times}_{1,2}$ を

$$\langle a,b\rangle \prec^{\times}_{1,2} \langle a',b'\rangle \iff a\prec_1 a' \ \&\ b\prec_2 b'$$

  と定義すると $\mathbf{I}(\prec^{\times}_{1,2})$ と積 $\mathbf{I}(\prec_1)\times\mathbf{I}(\prec_2)$ が計算可同型である。
- 余積 (coproducts): 推移関係 $\prec^{+}_{1,2}$ を

$$\langle a,i\rangle \prec^{+}_{1,2} \langle a',j\rangle \iff i=j\in\{1,2\}\ \&\ a\prec_i a'$$

  と定義すると $\mathbf{I}(\prec^{+}_{1,2})$ と余積（直和）$\mathbf{I}(\prec_1)+\mathbf{I}(\prec_2)$ が計算可同型である。
- 等化子 (equalizers): 全域関数 $\ulcorner R\urcorner,\ulcorner S\urcorner\colon \mathbf{I}(\prec_1)\to\mathbf{I}(\prec_2)$ の c.e. コード R,S から等化子 $\ulcorner E\urcorner\colon \mathbf{I}(\sqsubset)\to\mathbf{I}(\prec_1)$ となる c.e. 推移関係 $\sqsubset$ と c.e. コード E を計算できる（詳細を割愛する）。

圏 $\mathbf{QPol} = (\mathsf{Obj}, \mathsf{Mor}, s, t, i, \circ)$

Quasi-Polish 空間と連続関数の圏 $\mathbf{QPol} = (\mathsf{Obj}, \mathsf{Mor}, s, t, i, \circ)$ を次のように表現付き空間として構成する:

- Obj (対象) を $\mathbb{N}$ 上の推移関係全体からなる $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ の Π^0_2 部分空間とする。Obj の元 $\prec$ をイデアル空間 $\mathbf{I}(\prec)$ と解釈する。
- 表現付き空間 Mor (射) を次のように定義する:
  - 全域関数 $\ulcorner R \urcorner \colon \mathbf{I}(\prec_S) \to \mathbf{I}(\prec_T)$ となる組 $\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle$ 全体からなる $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times \mathsf{Obj} \times \mathsf{Obj}$ の Π^1_1 部分空間を $\mathcal{M}$ とする。
  - $\mathcal{M}$ 上の同値関係 $\langle R_1, \prec_{S_1}, \prec_{T_1}\rangle \equiv \langle R_2, \prec_{S_2}, \prec_{T_2}\rangle$ $\iff \prec_{S_1} = \prec_{S_2} \ \& \ \prec_{T_1} = \prec_{T_2} \ \& \ulcorner R_1 \urcorner = \ulcorner R_2 \urcorner$ と定義する。
  - Mor を $\mathcal{M}$ の $\equiv$ による商表現付き空間と定義する。

注: Obj は実効的 quasi-Polish 空間であるが、Mor は quasi-Polish 空間でない表現付き空間である。

- $s\colon$ Mor $\to$ Obj (始域) は $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$ を $\prec_S$ に写す。
- $t\colon$ Mor $\to$ Obj (終域) は $\langle R, \prec_S, \prec_T \rangle$ を $\prec_T$ に写す。
- $i\colon$ Obj $\to$ Mor (恒等射) は $\prec$ を $\langle =_{\mathbb{N}}, \prec, \prec \rangle$ に写す。
- $\circ :\subseteq$ Mor $\times$ Mor $\to$ Mor (合成) の定義域は

$$dom(\circ) = \{\langle g, f \rangle \in \text{Mor} \times \text{Mor} \mid s(g) = t(f)\}$$

であり、$f = [\langle R_f, \prec_S, \prec \rangle]_\equiv$ と $g = [\langle R_g, \prec, \prec_T \rangle]_\equiv$ に対し

$$\begin{aligned} R_{g\circ f} &= \{\langle m, n \rangle \mid (\exists p \in \mathbb{N})\,[\langle m, p \rangle \in R_f \,\&\, \langle p, n \rangle \in R_g]\}, \\ g \circ f &= [\langle R_{g\circ f}, \prec_S, \prec_T \rangle]_\equiv \end{aligned}$$

と定義する。$\ulcorner R_{g\circ f} \urcorner(I) = \ulcorner R_g \urcorner(\ulcorner R_f \urcorner(I))$ を容易に確認できる。

計算可能関手

次の条件を満たす計算可能関数 $F_{\mathsf{Obj}}\colon \mathsf{Obj} \to \mathsf{Obj}$ と $F_{\mathsf{Mor}}\colon \mathsf{Mor} \to \mathsf{Mor}$ の対 $F = (F_{\mathsf{Obj}}, F_{\mathsf{Mor}})$ を **QPol** 上の計算可能関手という。

- $F_{\mathsf{Obj}} \circ s = s \circ F_{\mathsf{Mor}}$
- $F_{\mathsf{Obj}} \circ t = t \circ F_{\mathsf{Mor}}$
- $F_{\mathsf{Mor}} \circ i = i \circ F_{\mathsf{Obj}}$
- $F_{\mathsf{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathsf{Mor}}(g) \circ F_{\mathsf{Mor}}(f)$ ($\langle g, f \rangle \in dom(\circ)$ のとき)

つまり、F は始域、終域、恒等射、合成を保つ。

注: 計算可能モデル理論で計算可能関手も研究されている (M. Harrison-Trainor, A. Melnikov, R. Miller, & A. Montalbán, 2017 や R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, & A. Shlapentokh, 2018)。しかし、その分野で扱われる圏は可算離散空間で構成されているため **QPol** の真の部分圏になる。

例: 下冪空間の関手 $\mathbf{A}(X)$

冪空間は、位相空間のコンパクト部分集合、オーバート部分集合、または確率測度などから構成される位相空間である。位相半束論、多価連続関数、非決定的プログラム意味論、様相論理などに応用される。

Definition

- 下冪空間 (lower powerspace)$\mathbf{A}(X)$ は X の閉集合全体に
  $\Diamond U := \{A \in \mathbf{A}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\} \qquad (U \in \mathbf{O}(X))$
  から生成される位相として定義される。
- $f\colon X \to Y$ は $\mathbf{A}(f)(A) = Cl_Y(\{f(x) \mid x \in A\})$ と定義される連続関数 $\mathbf{A}(f)\colon \mathbf{A}(X) \to \mathbf{A}(Y)$ に写される。

- 下冪空間の関手 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{A}_{\mathsf{Mor}})$ は次のように実現できる：
  - $\mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec) = \prec_L$
    - $A \prec_L B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B)\, a \prec b \qquad (A, B \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$
  - $\mathbf{A}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) = \langle R_L, \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{A}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle$
    - $R_L = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall n \in G)(\exists m \in F)\, \langle m, n\rangle \in R\}$

  従って、$\mathbf{A}$ は計算可能関手である。

例: 上冪空間の関手 $\mathbf{K}(X)$

Definition

- 上冪空間 $\mathbf{K}(X)$ は X の（飽和）コンパクト集合全体に
  $\Box U := \{K \in \mathbf{K}(X) \mid K \subseteq U\} \qquad (U \in \mathbf{O}(X))$
  から生成される位相として定義される。
- $f\colon X \to Y$ は $\mathbf{K}(f)(K) = Sat_Y(\{f(x) \mid x \in K\})$ と定義される連続関数 $\mathbf{K}(f)\colon \mathbf{K}(X) \to \mathbf{K}(Y)$ に写される。

- 上冪空間の関手 $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}, \mathbf{K}_{\mathsf{Mor}})$ は次のように実現できる：
  - $\mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec) = \prec_U$
    - $A \prec_U B \iff (\forall b \in B)(\exists a \in A)\, a \prec b$ for $A, B \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$
  - $\mathbf{K}_{\mathsf{Mor}}(\langle R, \prec_S, \prec_T\rangle) = \langle R_U, \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_S), \mathbf{K}_{\mathsf{Obj}}(\prec_T)\rangle$
    - $R_U = \{\langle F, G\rangle \mid (\forall m \in F)(\exists n \in G)\, \langle m, n\rangle \in R\}$

  従って、$\mathbf{K}$ は計算可能関手である。

その他の結果

- **QPol** 上の付値 (valuation) 冪空間の関手も計算可能である。
  - 計算可能位相空間論では確率測度やボレル測度の代わりに付値を利用するのが一般的である。
- T. Kihara, K. M. Ng, & A. Pauly (2019) は計算可能位相空間論と enumeration degrees の関係を徹底的に調べている。
  - 様々な実効的 quasi-Polish 空間に対応する enumeration degree も丁寧に解析されている。
- 最近の結果 (d., T. Kihara, & V. Selivanov, 2023)：
  - 「Quasi-Polish 位相に可算個の閉集合を開集合として追加しても quasi-Polish 位相になる」の実効的版を証明した。
  - 全ての実効的 ω-連続ドメインを含む計算可能枚挙を作った。
  - $\mathbf{I}(\prec)$ が距離化可能である c.e. 推移関係 $\prec$ 全体のインデックス集合は Π^1_1-完全である。
    - T_1 と T_2 分離公理も同様である。

未解決問題

- 具体的な問題:
  - ωFS-ドメインは $\mathbf{QPol}$ の最大のデカルト閉部分圏であるのか。
  - 「全ての第二可算 consonant sober 空間は quasi-Polish 空間である」は ZF+DC と無矛盾であるのか。
  - 「Quasi-Polish 位相に可算個の $\mathbf{\Delta}^0_2$ 集合を開集合として追加しても quasi-Polish 位相になる」の実効的版を証明すること。
  - 全ての実効的局所コンパクト quasi-Polish 空間の計算可能な枚挙は存在するのか。
- 探求的な問題:
  - （ポーランド空間以外の）T_1, T_2-quasi-Polish 空間を調べる
  - コンパクト quasi-Polish 空間の性質を調べる
  - $\mathbf{QPol}$ 内の圏対象（quasi-Polish 位相を持つ圏）を調べる
  - CoPolish 群や環を調べる
    - $\mathbb{S}$ をシェルピンスキー空間とする。関数空間 $\mathbb{S}^X$ がコンパクト開位相において quasi-Polish 空間となるようなハウスドルフ空間 X を coPolish 空間と呼ぶ。
    - $\mathbb{R}$ から生成される自由位相群や多項式からなる位相環 $\mathbb{R}[X]$ は coPolish である。

[1] R. Chen, *Borel functors, interpretations, and strong conceptual completeness for $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$*, Transactions of the American Mathematical Society **372** (2019), 8955–8983.

[2] M. de Brecht, *Quasi-Polish spaces*, Annals of Pure and Applied Logic **164** (2013), 356–381.

[3] ______, *Some results on countably based consonant spaces*, RIMS Kôkyûroku No. 2151, 2019.

[4] ______, *Some notes on spaces of ideals and computable topology*, CiE 2020 Proceedings, LNCS, vol. 12098, 2020, pp. 26–37.

[5] ______, *The category of quasi-Polish spaces as a represented space*, The 68th Topology Symposium of the Topology Section of the Mathematical Society of Japan (`https://www.mathsoc.jp/section/topology/topsymp.html`), 2021.

[6] M. de Brecht and T. Kawai, *On the commutativity of the powerspace constructions*, Logical Methods in Computer Science **15** (2019), 1–25.

[7] M. de Brecht, T. Kihara, and V. Selivanov, *Ideal presentations and numberings of some classes of effective quasi-Polish spaces*, arXiv: 2301.08469, 2023.

[8] M. de Brecht, A. Pauly, and M. Schröder, *Overt choice*, Computability **9** (2020), 169–191.

[9] M. Harrison-Trainor, A. Melnikov, R. Miller, and A. Montalbán, *Computable functors and effective interpretability*, The Journal of Symbolic Logic **82** (2017), no. 1, 77–97.

[10] R. Heckmann, *Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem)*, Math. Struct. in Comp. Science **25** (2015), 1607–1625.

[11] M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, and D. Stull, *Computability on quasi-Polish spaces*, Descriptional Complexity of Formal Systems, Springer, 2019, pp. 171–183.

[12] P.T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2002.

[13] T. Kihara, K. M. Ng, and A. Pauly, *Enumeration degrees and non-metrizable topology*, arXiv: 1904.04107, 2019.

[14] M. Korovina and O. Kudinov, *On higher effective descriptive set theory*, Unveiling Dynamics and Complexity, Springer, 2017, pp. 282–291.

[15] R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, and A. Shlapentokh, *A computable functor from graphs to fields*, The Journal of Symbolic Logic **83** (2018), no. 1, 326–348.

[16] A. Pauly, *On the topological aspects of the theory of represented spaces*, Computability **5** (2016), no. 2, 159–180.

[17] M. Schröder, *Admissibly represented spaces and Qcb-spaces*, pp. 305–346, Springer International Publishing, 2021.

[18] V. Selivanov, *Towards the effective descriptive set theory*, CiE 2015 Proceedings, LNCS, vol. 9136, Springer, 2015, pp. 324–333.

[19] S. Vickers, *Continuity and geometric logic*, Journal of Applied Logic **12** (2014), no. 1, 14–27.

[20] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, 2000.