数学セミナー２００６年４月号,「フラクタルマジック（１） --シェルピンスキー四面体を用いた総合学習教材--」より。

形と影 --- 小学生から帰納法

昨年9月に，中学生を対象にしたジュニア・キャンパスという催しが京都大学で 行われ，私も，そこで，シェルピンスキー四面体に関する講義と工作を, 34名 の中学生相手に行いました．また，同じ時期に，京都府教育委員会の夢大使(大 志)派遣事業で，八幡市立橋本小学校と宇治市立南小倉小学校を訪問し，前者で は5, 6 年生205名，後者では6年生36名の児童を相手に，講義と工作を行いまし た．その時の講義を再現しながら，シェルピンスキー四面体（の近似物）の性 質について述べたいと思います．講義ではまず，準備として，正四面体，立方 体，正八面体について，模型を用いて辺や面や頂点の個数を調べました．

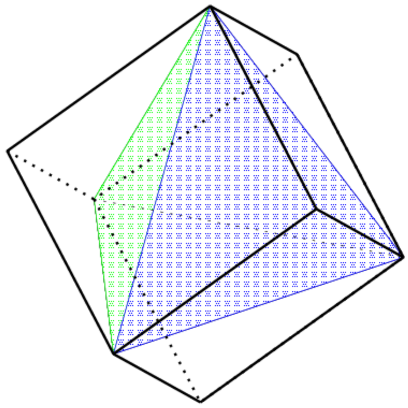
講義の題は「形と影」です．さまざまな立体の影の形を考えては，プロジェク タを使って実際に影を作りそれを検証していきます．結果を見て楽しむのでは なく，とにかく考えさせ，その中で自然に数学的帰納法の考え方を身につける のが目的です．

球(ボール)： どんな影になりますか？
もちろん，円です．

正四面体： どんな影になりますか？
ボールの影を見せた後だからでしょう，たいていの生徒が三角形と答えてくれ ました．もちろん，光を当てる方向によって影の形は変わります．そしてそれ は，４つの正三角形の面の影を合わせた形です．正三角形の影は，３つの頂点 の影の3点を結んでできる三角形か線分です．ですから，正四面体の影は，４つ の頂点の影の４点から３点を選んで結んでできる４つの図形の和であり，4点が 一直線上に並ぶことはないので，三角形か四角形です．[もちろん，このように 説明したのでは，小学生はついてこれません．立体をいろんな方向から見せ ながら，輪郭の形がどのように変化するか観察させるのがいいでしょう．]

正四面体(辺の方向から投影)： では，光を当てる方向を， 辺の中点から相対する辺の中点にぬける方向にした時にはどんな影になるでしょうか．

正四面体のその辺を鉛直にして この方向から見ると， 左右対称，上下対称です．ですから，その影も，左右対称，上下対称のはずで， ひし形だとわかります．さらに，対角線の長さも等しいので，正方形です． [もちろん，プロジェクタは点光源なので，実際にはひし形にしかならないのですが，平行光線と仮定して話をすすめました．]



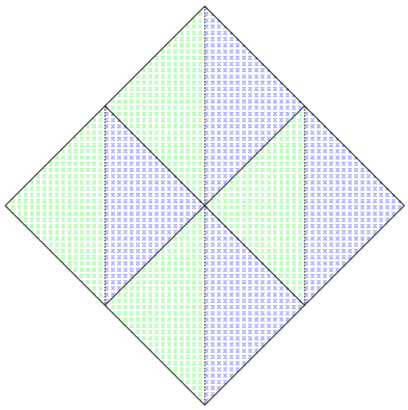
立方体と四面体の関係

正方形の影ができることは，立方体と正四面体の関係を考えると分かりやすい です．上図のように，立方体から４つの頂点を切り落とすと正四面体ができま す．正四面体を立方体に入れて考えると，辺の方から正四面体を見るというの は，立方体の面の方から見ることになり，正方形に見えているのです．このこ とから，正四面体が正方形に見える方向，すなわち，向かい合う辺の中点を結 ぶ直線は3本ありますが，それらは互いに直交していることが分かります．

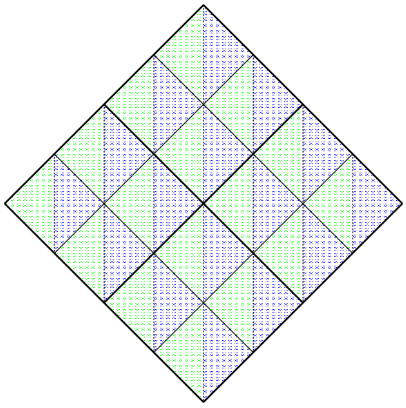
用意した立方体の模型は，このことを説明するために，上図のように分解して 中から正四面体を取り出せるようにしておきました．正四面体が正方形に見え ることは，物事は見る方向を変えれば見え方が違ってくると示唆的ですし，正 多面体どうしの関係から説明できるのも奥深く，小学生に話したかったことの 一つです．

1-シェルピンスキー四面体(辺の方向から投影)： ここからが重要 です．正四面体の模型も細工をして，真ん中の正八面体を取り出して，1-シェ ルピンスキー四面体にできるようにしておきました．1-シェルピンスキー四面 体に辺の方から光を当てたときの影の形はどうなるでしょう？

全体が正四面体に穴をあけた形なので，その影も，正方形に穴をあけた形のは ずです．また，1-シェルピンスキー四面体をなす，4つの正四面体がそれぞれ 1/2の大きさの正方形の影を作るはずです，そして，それら４つの正方形は，頂 点で互いにつながっているはずです，これらのことから，穴がふさがって，正 方形になると推論することができます．



2-シェルピンスキー四面体(辺の方向から投影)： ４つの1-シェル ピンスキー四面体がそれぞれ 1/2の大きさの正方形の影を作ることから，同様の 推論で，正方形の影ができることがわかります．



3-シェルピンスキー四面体(辺の方向から投影)： これも，同様の推論 で，正方形の影ができることが分かります．立体が複雑になってくると，プ ロジェクタの前で回転させる間に正方形だけでなく２次元シェルピンスキー・ガスケッ トも現れ，影の動きが魅惑的になります． [この写真](#)を 参考にしてください。

模型を用意したのはここまでです．ここで，3-シェルピンスキー四面体のそれ ぞれの正四面体に穴をあけて4-シェルピンスキー四面体にしたときにはどうな るか，これをさらに繰り返して，どんどん細かくしていったときにどうなるか， 考えてもらいました．同様に考えて，どこまで続けても正方形になることが理 解してもらえれば，この授業は成功です．

言うまでもなく，これは，数学的帰納法です．数学的帰納法は，有限の推論か ら「どんな n に対しても…」という無限個の場合で成り立つ法則を導く，大 切なものです．現在，数学的帰納法は，漸化式と一緒に高校2年で習うことになっ てますが，その感覚を自然に体感してもらえたのではないかと思っ ています．

これで，中学生にはちょうどいい難易度だったと思います．小学校で行った講 義では，正四面体はもちろん三角柱も教科書には載っていないのですから，生 徒も私も苦労しました．一回だけの授業ではなく何回も時間をかけて行えれ ば，「小学生から帰納法」も不可能ではないと思うのですが，いかがでしょう か．その分，次号で紹介する工作は，十分楽しんでもらえました．

シェルピンスキー四面体の射影

前節でみたように，n-シェルピンスキー四面体 S_n は，辺の方向から平面に 射影するとどれも同じ正方形になりました．このことは，次のように， シェルピンスキー四面体 S でも成り立ちます． この正方形内の点 y に対し，y に射影される S_n (n = 0,1,2,...) の 点の集合を H_n とします．H_n はそれぞれ閉区間か２点集合であり，H_0 ⊃ H_1 ⊃ ... です．よって，コンパクト集合の縮小列なので， その共通部分 H = ∩_n{H_n} は空集合ではありません．H に属する点 は，すべての S_n に属するので S に属し，しかも y に射影されます．よっ て，この正方形が S の射影の像であることが分かります．

このように，シェルピンスキー四面体は極限操作で定義されてい るので，その性質の証明には，どうしても位相的な議論が入ってきます．それ は，有限再帰図形が数学的帰納法で考えられる世界であるのと対照的です．こ のように，両者は，数学的にも計算機科学的にもまったく扱いが異なります． 有限再帰図形と自己相似図形の関係は，有理区間と実数の関係と同じといって いいでしょう．パソコンに絵を描かせてフラクタルに対するイメージを湧かせ るのは重要です．しかし，パソコンが瞬時に細かいところまで描画してくれる のを見ると，無限の極限を手に入れたかの錯覚を覚えるのではないかと思いま す．時には，パソコンなど用いずに，有限のものを手で描

いたり，あるいは工 作したりしながら，その無限の極限について想像することも数学教育には重要 だと思うのですが，いかがでしょうか.