イマジナリーキューブ・パズル

立木秀樹　(京都大学大学院人間・環境学研究科)*

1. イマジナリーキューブ

次の問題を考えて頂きたい。

直交する3方向から正方形に見える立体は何でしょうか？

立方体は一つの答えであるが、もちろん、唯一の答えではない。立方体の頂点の周りを少し削ってもこの性質を満たしていることは明らかだし、正四面体や立方八面体もこの性質を満たしている。直交した3方向から射影して立方体と同じ様に正方形になる立体のことを、イマジナリーキューブ と呼ぶことにする[1]。図1に幾つかのイマジナリーキューブの例をあげた。それぞれ、正方形に見える方向は分かりますか？

(a), (b) はともかく、(c) と (d) の立体（それぞれ、Hexagonal bipyramid imaginary cube と Triangular antiprismoid imaginary cube の頭文字をとって、H, T と呼ぶことにする）がイマジナリーキューブになるのは自明ではないだろう。図 3 に、これらの立体がちょうど収まる立方体を図示した。

これらの立体を立方体の箱に入れることは、意外と難しくてパズルとして楽しめる。すぐに入ってしまうこともあるが、しばらく試して入らないとあせってしまい余計に入らなくなったりする。そして、それまで正方形とは無縁に思えていた立体が、いったん箱に入れると箱の各面から正方形に見えること、箱から取り出すとまたどこから正方形に見えていたか分からなくなってしまうことを、大抵の人は楽しんでくれる。

イマジナリーキューブの中でも H と T は面白い幾何学的性質を持っている。「3H=6T」という 3 つの H と 6 つの T を 2 倍の大きさの箱に入れるパズルを考案した (図2)[2]。個々はイマジナリーキューブであり箱に入れることができるので 8 つなら入ることは分かるが、実は 9 個入れることができる。これにピースの間に隙間がないように入れ

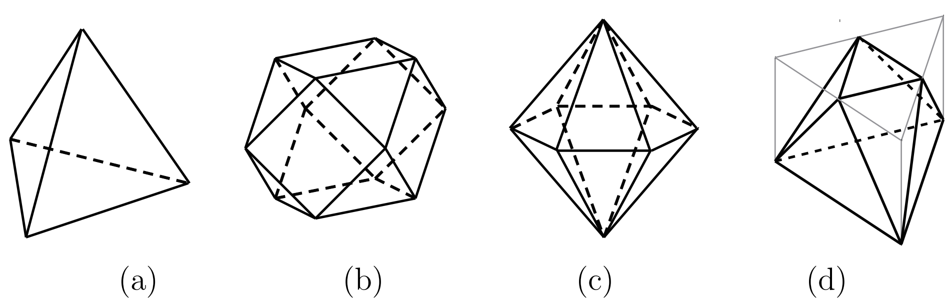


図 1: イマジナリーキューブの例：(a) 正四面体。(b) 立方八面体。(c) H : 底辺：高さ =2:3 の二等辺三角形の面を12個もつ重六角錐。 (d) T : 辺:高さ=4 : $\sqrt{6}$ の正三角錐の片方の底面の各頂点の周りを切ってできた反三角錐台。

* e-mail: tsuiki@i.h.kyoto-u.ac.jp
web: http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki

[1] 正八面体や菱形十二面体も直交した3方向から射影して正方形になるが、これらは立方体の時と正方形の傾きが異なっている。立方体と同じ様に、ある方向から射影して得られる正方形の辺が残りの2方向と平行な場合だけをイマジナリーキューブと呼ぶことにする。

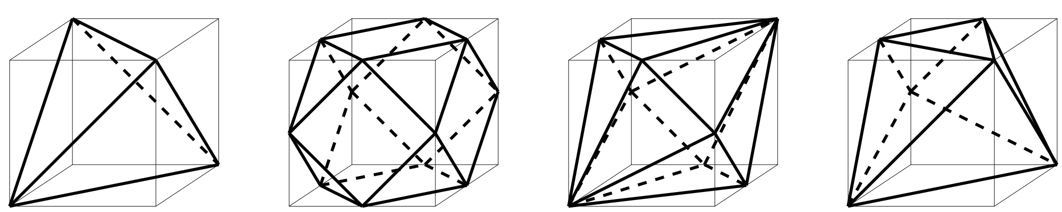
[2] 京都大学博物館ショップ・ミュゼップから購入可能である [6]。

図 2: 3H=6T パズル。

るという条件を加えると、対称性のあるきれいな配置をした唯一の解に（回転を除いて）定まる。このパズルのヒントとしてH と T の幾何学的な話をしながら、いろんな人にこのパズルを解いてもらうのを楽しんでいる。一見、これは普通の箱詰めパズルであり、大抵の人は試行錯誤的に考え始めるが、その解には H と T の幾何学的性質が関係しており、最後にはその美しさに感動してくれている（と思う）。パズルそのものを楽しんでもらおうということもあるが、その裏にある数学が美しくて、それを伝えたくてパズルを利用しているというのが私の魂胆である[3]。本稿では、パズルと関係づけながらイマジナリーキューブの性質について説明し、また、イマジナリーキューブに関連してこれまで制作したオブジェや行ってきた教育活動について紹介する。詳しくは、2、3章は [1]、4章は [4, 5]、5章は [2] を参照されたい。

2. 極小凸イマジナリーキューブ

立方体 C に対して、C と同じように直交した3方向への正方形の射影を持つ立体を、C のイマジナリーキューブと呼ぶことにする。C のイマジナリーキューブは C を削ることにより作られる。その中でも凸な図形、すなわち、平面で削って得られる立体だけを考え、さらにその中で極小な図形、すわなち、これ以上削ったら C の凸イマジ



(a) (b) (c) (d)

図 3: 図1のイマジナリーキューブの箱に入れ方

[3] 正直言って、私は問題自体が数学の問題である数学パズルの類は好きであるが、数独やクロスワードパズルなどのパズルはあまり好きではない。時には私も楽しむが、他人が作ったパズルを解くのにあまりに熱中するのは人生の貴重な時間とエネルギーの無駄使いの気がする。

ナリーキューブでなくなる立体を考えて、そのような立体をCの極小凸イマジナリーキューブと呼ぶことにする。そして、ある立方体の極小凸イマジナリーキューブになっている立体を、単に極小凸イマジナリーキューブと呼ぶことにする。極小凸イマジナリーキューブはどれだけあるだろうか。

ある凸立体PがCのイマジナリーキューブであることの必要十分条件は、Cの全ての辺上にPの点があることだと容易に分かる。特にPが極小凸イマジナリーキューブの時にはPはCとPの共通部分の凸包であり、よって、Pは全ての頂点がCの辺上にある多面体である。Pの頂点のうちCの頂点でもあるものを頂-頂点、Cの頂点でないものを辺-頂点といい、前者の集合を$V(P)$と書くことにする。Cの辺上に頂点がありさらにもう一つその辺の両端以外に頂点がある時には、それを除いてより小さな凸イマジナリーキューブを作ることができる。一方で、辺の両端に頂点がある時には、両方とも他の辺の唯一の頂点であるために取り除けない場合がある。このことから、Pの頂点は、各辺上に、辺-頂点が1個だけあるか、頂-頂点が1個あるか、頂-頂点が2個あるかのどれかである。Cのある頂点aとその隣の3頂点が全て$V(P)$に属すると、aを除いても凸イマジナリーキューブとなるので、$V(P)$はそのような部分集合を含まない。逆に、この条件を満たすCの頂点集合Sに対し、Sに端点が含まれない辺上に辺-頂点を1つづつ選べば極小凸イマジナリーキューブができる。今、$V(P)=V(P')$の時にPとP'は同値であると定義する。すると、同値類は上記の条件を満たすCの頂点集合と対応して存在し、それは、回転で重なるものを同一視すれば16種類、鏡像も同一視すれば15種類ある。よって、Cの極小凸イマジナリーキューブは16種類（鏡像を同一視すれば15種類）に分類される。図4はその一覧である((No. 10 L)と(No. 10 R)は鏡像関係)。この表で、それぞれの同値類の代表元の辺-頂点は辺の中点にとった。同時に2つの立方体の極小凸イマジナリーキューブになっている立体はNo. 5に属するものだけであり、どちらも立方体に対してもNo. 5に属する。よって、極小凸イマジナリーキューブも16種類（鏡像を同一視すれば15種類）に分類される。

この16種類の極小凸イマジナリーキューブを木工の専門家の方に作って頂き、それらを用いた授業を小学生から大学生を相手に行ってきた(図5)。一般に、これらの立体を目の前にしても正方形の射影を持つことに気づくのは難しい。それは、極小凸イマジナリーキューブには3つの直交する面で囲まれた頂点が存在しないことが関係していると思う。授業では、これらの立体を用いてオイラーの定理や立体の対称性の話もしている。

3. パズルの解と H と T による空間充填

この16種類の中には、No.1の立方八面体、No.13の正四面体、No.16の反三角柱といったきれいな立体が存在する。これらは、辺-頂点だけか頂-頂点だけでできている。これら以外に特に面白い立体が2つ存在する。それが H と T である。

No.5 は H (すなわち図1の(c))であり、六角錐を2つ底面で貼り合わせた十二面体（重六角錐）である。これは面方向への射影で正方形になり、しかも六回対称性をもっている。すなわち、正方形に射影される方向が3つではなく6つあり、同時に二つの立方体のイマジナリーキューブ（ダブルイマジナリーキューブ）になっている。ダブルイマジナリーキューブは No. 5 の同値類だけに存在し、立方体と、それを相対する頂点を通る軸で回転してできた立方体の共通部分として得られる。

No.8 は T (すなわち図1の(d)) である。これは、正三角柱の3つの頂点を切り落と

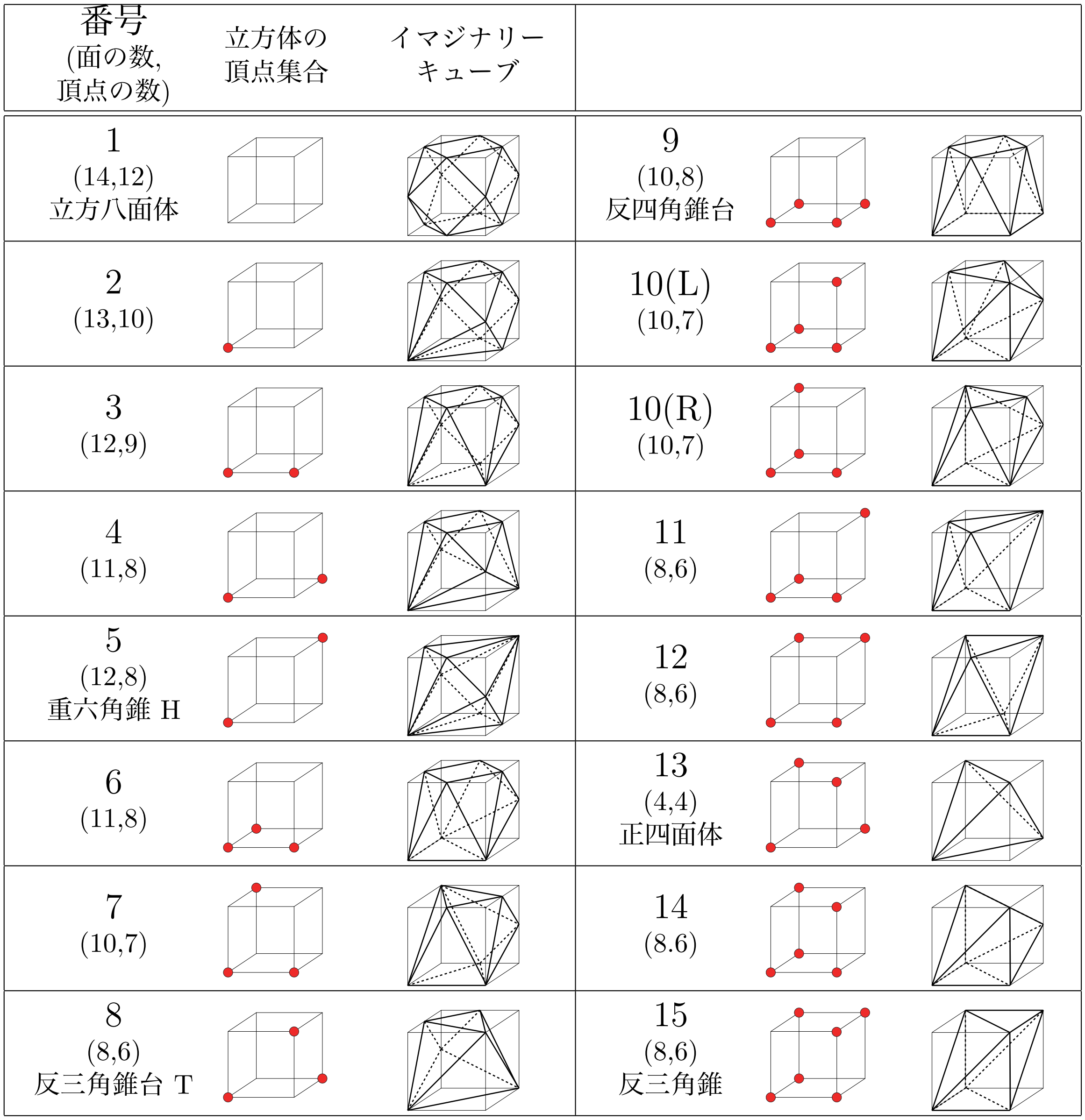


図 4: 16 種類の極小凸イマジナリーキューブ

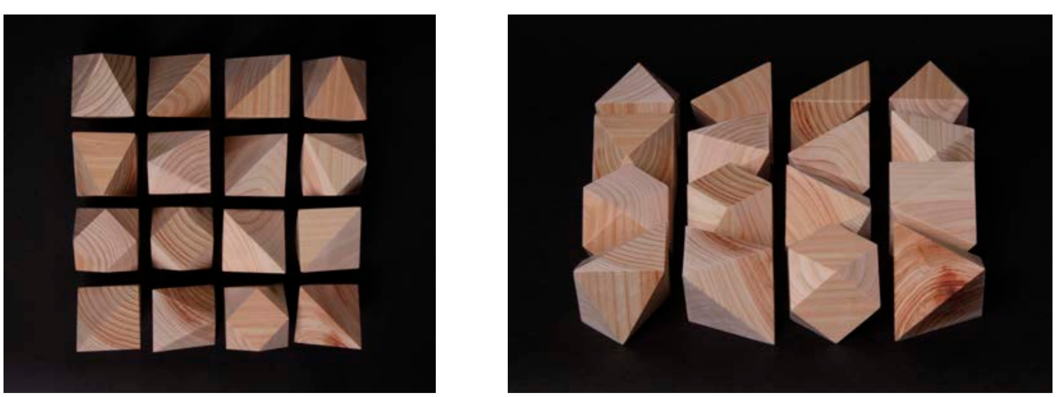


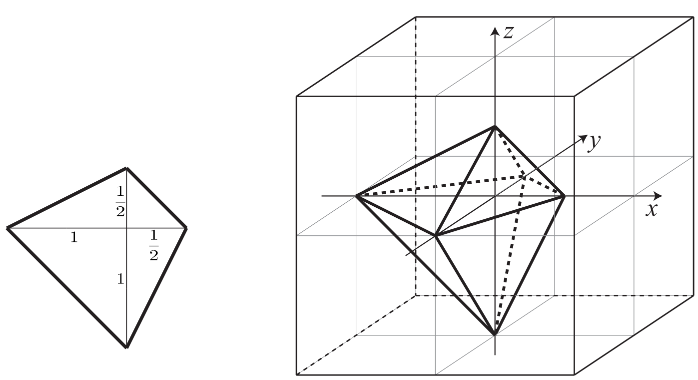
図 5: 木工による、16 種類のイマジナリーキューブ。

してできた立体でもあり、正三角錐を高さ半分で切った三角錐台の上の面を60度回転したもの（反三角錐台）でもある。この立体では、相対する頂点を結ぶ3つの直線が一点で交わり、お互いに直交している[4]。3つの座標軸上で原点から等距離の6点を選ぶと正八面体ができるが、反三角錐台は座標軸の負のところでは正のところの2倍の距離の点を選んでできた八面体である。しかも、負のところの長さはこの立体を囲む立方体の一辺の長さと一致している。よって、大きさ2倍の箱の中心に原点があると思い、この方法でTを配置すると図6のようになる。

さて、3H=6Tパズルは、立方体8個が入る箱にイマジナリーキューブを9個入れるパズルであった。この解は、立方体から切りとられた部分を箱の真ん中に集めて、できた空間に1つのピースを置く形になる。図6(b)のTは、まさにそういう配置になっている。この配置では、Tの8つの面がそれぞれ周りの8つの立方体を切っている。一方で、図3(d)を見れば、Tの面は、立方体を切った切り口にできた大小の正三角形の面と大きな二等辺三角形の面3つ、それに、立方体の面の一部である細い二等辺三角形の面3つからなっている。前者5つの面は、図6(b)の中心のTがまわりの立方体を切っている面と同じである。よって、これらの立方体にTを、中心のTと面を共有する様に置くことが出来る。こうした時に、残りの3つの立方体それぞれは、一つの頂点の周りが細い二等辺三角形で切りとられ、また、周りの3つの立方体にはTが、細い二等辺三角形の面をこの立方体に向けて入っている。つまり、3つの立方体には、周りの4つのTと面を共有するようにHを入れることができ、パズルが完成する。図7の様に、この解はきれいな3回対称をしている。

ピースの間に隙間がないという条件[5]のもとで、この解が箱の回転で重なるものを同一視して唯一の解である。また、この条件がないと解の個数は増えるが、それでも全ての解で中心のTは同じ位置にあると予想される。

HとTは相性がよく、図8(a)の様にT6個を輪のようにつなげると、(b)の様に真ん中にHが納まる。これは正六角形と正三角形による平面充填形のように無限につな



(a) (b)

図6: (a) Tの断面図。(b):Tを座標軸の原点に置いた図。

[4] この立体の説明をする時には、相対する頂点を指に挟んで回転させて、残り4つの頂点が同一平面上で回転することを見せて、これが何を意味するか考えてもらうようにしている。

[5] [1]では、ピースとその面、辺、頂点の全体がpolytopal complexをなしており、ピースの和がstar-polyhedronをなしているという条件にしたが、パズルとして出題する時には「ピース間に隙間がないように」と言っている。

(a) (b)

図 7: (a) 下段4つを入れたところ。真ん中の窪みに T を入れる瞬間が楽しい。(b) パズルの解を対称軸の方から見たところ。

げることができ(c)、T をひっくり返して上にのせていくと (d) の様に板状にすることができる。この板状のものを重ねることにより、H と T による3次元空間のタイリングができる。このタイリングの中で、ある T に着目してそれと接している8つのピースの塊を取り出してきたものが、このパズルの解である。このタイリングは、立方格子 A と、A を x=y=z の周りで60度回転してできた立方格子 B の和集合に対するボロノイ分割になっている。A と B の共通部分に H が、それ以外の点に T がくる。

4. フラクタル・イマジナリーキューブと数独オブジェ

H と T という二つの多面体は、フラクタル・イマジナリーキューブについて考えている中で現れた。ここではフラクタルという言葉を自己相似図形の意味で使うことにする。シェルピンスキー四面体（3次元シェルピンスキー・ガスケット）は、図形をもらい正四面体 $\hat{\mathrm{S}}_0$ の4つの頂点を中心とした 1/2 の縮小像の和集合を返す写像を G とした時、 $\hat{\mathrm{S}}_0$ からはじめて、G を繰り返し適用してできる図形の列 $\hat{\mathrm{S}}_0 \supset \hat{\mathrm{S}}_1 \supset \hat{\mathrm{S}}_2 \ldots$ の極限となる図形 S_F で、$G(\mathrm{S}_F) = \mathrm{S}_F$ を満たしている。G は 1/2 の相似比の縮小写像 4 個からなるので S_F は相似次元が2のフラクタルであり、また、$\hat{\mathrm{S}}_n$ が全て $\hat{\mathrm{S}}_0$ と同じ正方形の射影を持つイマジナリーキューブであることから、S_F もイマジナリーキューブとなる。射影が正方形になるためには、フラクタルの相似次元は2以上である必要が

(a) (b) (c) (d)

図 8: 3次元ユークリッド空間の H と T によるタイリング。

あることに注意されたい。

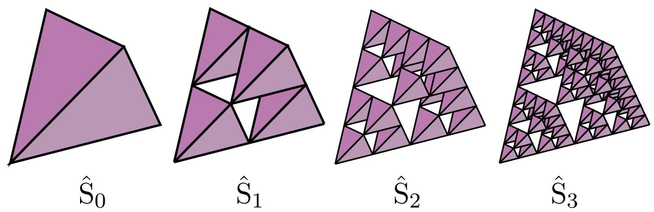


図 9: シェルピンスキー四面体

シェルピンスキー四面体以外にも、回転を行わない相似比 $1/k$ の相似縮小写像 k^2 個から作られる相似次元が2のフラクタル・イマジナリーキューブは存在するだろうか。k^2 個の相似縮小写像により定義される写像を G とすると、フラクタルは最初の図形の取り方によらず G だけから定まるので、3つの正方形の射影から定まる立方体を最初の図形として、G を繰り返し適用することにより作られるフラクタルの近似列を考える。シェルピンスキー四面体の場合には、下図のようになる。赤丸は、相似縮小写像の中心である。

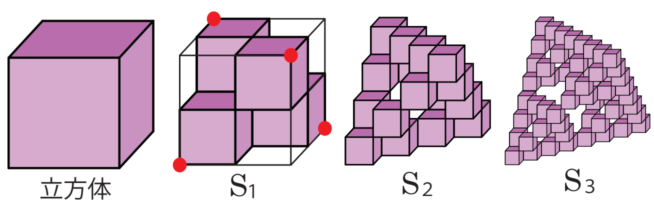


図 10: シェルピンスキー四面体の立方体近似

こうして見ると、第1次近似立体がイマジナリーキューブである、つまり、第1次近似で現れる k^2 個の立方体が3方向から見て互いに重ならずに全体で正方形をなすことが、極限図形がイマジナリーキューブになるための必要十分条件であることが分かる。$k = 2$ の時には、そのような配置は回転で重なるものを同一視してシェルピンスキー四面体の時の一通りだけである。$k = 3$ の時には、下図の H_1 と T_1 の2つの場合がある。これらから得られるフラクタル立体を H_F と T_F とする。H_F と T_F の凸包は、縮小写像が回転を含まないので、縮小写像の中心全体の凸包と一致する。それは、H と

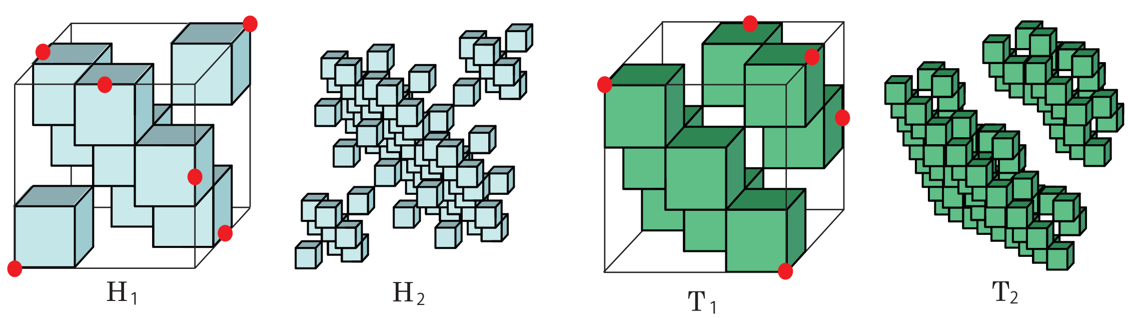
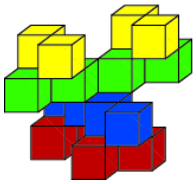
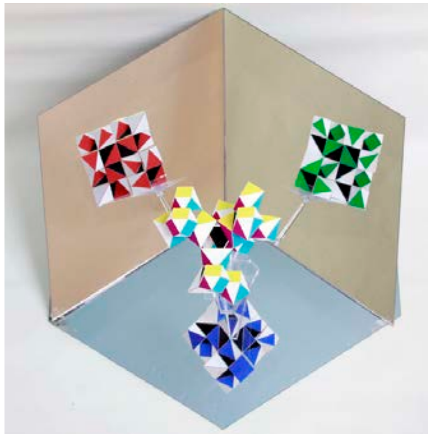


図 11: H_1 と T_1


(a)


(b)


(c)

図 12:

T である。H_1 は3回対称性しかもたないのに、それから得られるフラクタル H_F とその凸包の H は6回対称性を持つことに注意されたい。

このように、H_1 と T_1 の9つの立方体の配置は重要な意味を持つ。そこで、H_1 と T_1 の9つの立方体の各面に写真の断片があり、6方向から見た時にそれらがつながって6枚の写真が見えるオブジェの型紙を制作した[6]。

k=4 の時には36 通りの配置があるが、連結なものは、シェルピンスキー四面体の2次近似と図12(a) の配置だけである。これらの配置は立方体16個からなるが、それら16個を他のイマジナリーキューブに置き換えてもイマジナリーキューブになる。そこで、この位置に図4の16個の極小凸イマジナリーキューブを頂点でつながるように配置したイマジナリーキューブ・オブジェを作成した[7]。写真(b) は、(a) の配置で作成した立体の周りに3枚の鏡を置き、立体と、3つの正方形の射影像を同時に見えるようにしたオブジェである。また、写真(c) は第2章で紹介した木製のイマジナリーキューブ16個をつなげて作ったオブジェである[8]。

5. フラクタル数独立体

シェルピンスキー四面体の近似立体を正四面体から作ったように、H_F と T_F のフラクタルの近似立体は、立方体ではなく H および T を基本図形として作るのが自然である。特に、H から作られた近似立体は、H_F と同じように6回対称性を持つダブルイマジナリーキューブとなる。図 13は、H 81個からなる2次近似の模型を紙で作成したものである。

この立体が正方形に見える時には、9×9 の格子に正方形が並んだ様に見える。これは、数独パズルの格子である。そこで、81 個のピースに9色で色づけして、正方形に見えるそれぞれの方向から見た時に、それぞれの列、行、3×3 のブロックに9 色全てが現れるようにできるかプログラムを組んで調べてみた。すると、そのような解は、立体の合同変換と色の入れ替えで等しいものを除いて15種類存在することが分かった。15個しかないのならと、論理的にそのことを証明した [2]。つまり、解が分かった状態か

[6] H と T の型紙と透明な箱もつけて京都大学生協時計台ショップで販売中である [7]。
[7] この配置は、まさにパズルとして楽しめた。
[8] Bridges 2010 (Pecs) 会議で展示を行った。

(a)

(b)

図 13: (a) フラクタル数独オブジェ。(b) (a) の立体を 12 個の正方形の面を持つ多面体に入れ、正方形の面から見たところ。

らではあるが、この立体数独パズルを手で解いた。図 13 の立体はその中でも対称性の高い色づけを採用している。さらに、この近似立体が正方形に見える 12 方向に自然に目がいくように、12 個の正方形の面をもつ透明な 32 面体を作成し、その中に納めて、「フラクタル数独オブジェ」と名づけた [9]。

また、H_F および T_F のフラクタルの、立方体を基本図形とした 2 次近似 (図 11 の H_2 と T_2) に対する 3 方向射影で数独解となる解の個数もアルゴリズムを工夫して調べた [3]。この数独の条件は、縦と横とブロックに加えて深さ方向でも同じ数字が現れないと言い換えられるので、深さを 9 色で表して同じ深さのマス目を同じ色で塗ることにより、同じ色のマス目に同じ数字が表れないという条件を追加した数独パズルとして紙の上で楽しむことができる。こちらの方は、H_2 配置も T_2 配置も共に、色の入れ替えで等しいものを除いて 5,065,278 個解がある。これだけ解のパターンがあると、パズルとして十分楽しめるのではないかと思っている。

数独と同様な色付けは、$9^n \times 9^n$ の格子に対して、9^n 個の色をつける形でも考えられる。それでは、H のフラクタルの $2n$-次近似立体に対して、同様に 12 方向から見て数独的色づけになるような 9^n 色による色づけは可能だろうか。このようなフラクタルの近似立体の性質を帰納法で証明する時には、$2n$ 次近似立体の色づけをもとに、各ピースを 2 次近似に置き換えてできた $2(n+1)$ 次近似立体に色づけができることを示すか、$2n$ 次近似立体を 81 個つなげてできた $2(n+1)$ 次近似立体の色づけができることを示すのが普通だと思うが、どちらも成功しなかった。それに対して、$2n$ 次近似立体の色づけに対し、各ピースを 1 次近似に置き換えてできた $2n+1$ 次近似立体を 9 個つなげてできた $2(n+1)$ 次近似立体の色づけを考えると証明ができた [2]。この手順を 1 辺の長さが 1 の H から始めると、$2n$ 次近似立体中の各 n 次近似立体は最初の H と同じ大きさであり 9^n 色全てを含み、それを基本図形とした n 次近似立体が全体となる。よって、各ピースは、長さ n の $\{1, 2, .., 9\}$ の文字列 2 つのペア（整数部分、小数部分と呼ぶこと

---

[9] Bridges 2007 (Donestra) 会議で展示を行った後、3 年にわたって京都大学総合博物館ロビーに展示いただいた。

にする）によりアドレスがふられる。そして、各ピースには $\{1, 2, .., 9\}$ の長さ n の文字列の色がふられるが、近似の次数を上げると各ピースが細分されると同時にそれらにふられる色も細分化されて(すなわち最後に文字がつけ加わって）いく。よって、この極限として得られる無限に大きいフラクタル立体を考え、その上に無限文字列による色づけが考えられる。この立体の各点は、有限文字列（整数部分）と無限文字列（小数部分）のペアによりアドレスがふられ、無限文字列の色が与えられる。ピースの境界となる点は2つのアドレスと色を持つ。そして、この立体は6方向の射影により平面全体に射影されるが、その際に、各基本ブロックは一辺の長さ1の正方形に射影され、それらは全ての色を1回づつ含む。また、縦、横の各直線(ピースの境界の所には2本の線が重なっているとする）上にも、全ての色とはならないが、色全体の稠密な部分集合により色づけされる。全ての色でないのは、アドレスの整数部分が有限、小数部分が無限だからである。整数部分も無限文字列となるような空間で完備化して考えれば、縦と横の直線上にも全ての色文字列が含まれるようになるが、残念ながら、それは3次元空間では実現できない。

6. 終わりに

この一連の「研究」は、シェルピンスキー四面体の近似立体の各正四面体ピースに写真の断片を貼付けて辺方向から見て写真が見えるオブジェを制作したことから始まる。一般の人に数学の面白さを伝たくて始めたが、イマジナリーキューブという単純な概念に関連して、これほどの内容（数学、オブジェ、パズル、教材）を楽しめるとは思ってもみなかった。数学は楽しいものなのだから人間の問題を解く楽しみの感覚（パズル）とつなげることができれば、そして、数学は美しいものなのだから人間の美しさの感覚（これを芸術といっていいのかどうかは分からない）に直接訴えることができれば、数学をもっと一般の人に近づけることができるのではないかと考えている。

参考文献

[1] Hideki Tsuiki, Imaginary Cubes and Their Puzzles. Algorithms 5(2), pp. 273-288, 2012.

[2] Tsuiki, H. SUDOKU Colorings of the Hexagonal Bipyramid Fractal. In *Computational Geometry and Graph Theory, International Conference KyotoCGGT 2007 Revised Selected Papers, LNCS Vol. 4535*, Springer, pp. 224-235, 2008.

[3] Hideki Tsuiki and Yohei Yokota, Enumerating 3D-Sudoku Solutions over Cubic Prefractal Objects. Journal of Information Processing 20(3), pp. 667-671, 2012.

[4] Tsuiki, H. Does it Look Square? — Hexagonal Bipyramids, Triangular Antiprismoids, and their Fractals. In *Proceedings of Conference Bridges Donostia*, pp. 277-286, 2007, Tarquin publications.

[5] Tsuiki, H. Imaginary Cubes — Objects with Three Square Projection Images. In *Bridges Pecs, Conference Proceedings*, pp. 159-166, 2010, Tessellations Publishing.

[6] 立木秀樹 『イマジナリーキューブ・パズル 3H=6T』（3H=6T パズル付き）京都大学総合博物館ミュゼップ（アクティブKEI）, 2012.

[7] 立木秀樹 『Imaginary Cube パズル —重六角錐／反三角錐台編—』京都大学生活協同組合, 2012.