数学教室だより：アウトリーチ編

編集部では，各教室で行われたアウトリーチ活動等を「数学教室だより」の記事として取り上げてまいります．今回は京都大学人間・環境学研究科の出前授業について書いていただきました．

「数学通信」編集部

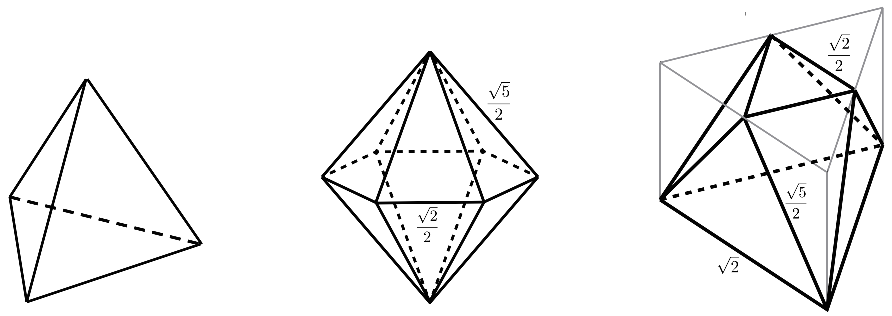
＊　＊　＊　＊　＊　＊　＊　＊　＊

イマジナリーキューブ・パズルを用いた数学授業について
— 京都大学人間・環境学研究科のアウトリーチ活動より —

京都大学人間・環境学研究科の数理科学講座は，現象数理論分野 (5 名) と数理情報論分野 (4 名) で構成されており，私（立木）は後者に属しております．私は数理と情報にまたがって幅広く研究・教育をしておりますが，その中で，イマジナリーキューブという立体の幾何に関する概念に興味をもち，それに関連した出前授業を，京都府教育委員会の「子どもたちの知的好奇心をくすぐる体験授業」などの依頼を受けて毎年行ってきました．その中でも，私がデザインしたパズル（イマジナリーキューブ・パズル 3H=6T [1,2]） を用いて中学生，および，高校生に対して行なってきた授業は，単にパズルで遊ぶだけではなく，中学・高校の数学教科の学習を補助する内容になっていると思います．本稿では，それについて紹介をさせていただこうと思います．

1　イマジナリーキューブと 3H=6T パズル

立体をある直交する 3 方向に射影した時に，各射影により，残り 2 方向と平行な辺をもつ正方形に射影される立体のことを，イマジナリーキューブと呼ぶことにします．言



正四面体　　H　　T

図 1: これらの立体はイマジナリーキューブです．図 2と見比べてください．

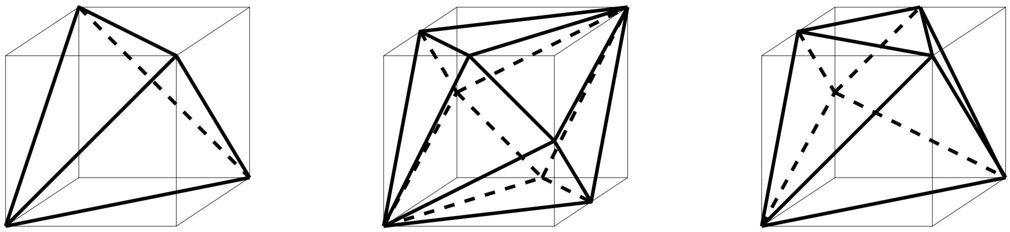


図 2: 前ページの立体を箱に入れたところ.

い換えると，ある立方体の箱におさまり，立方体の各面方向から見てその面と同じ正方形に見える立体です．立方体の他に，正四面体や，そのフラクタル（シェルピンスキー四面体）がこの性質を満たしています．それ以外にも，図 1の，正六角錐を２つくっつけた形 (H とよぶことにします) や，正三角柱の片方の底面の頂点の周りを切った形 (T とよぶことにします) もイマジナリーキューブになっています[1][2].

このHとTは，イマジナリーキューブなので立方体の箱におさまりますが，その２倍の大きさの箱に，H 3 個と T 6 個を，ピースの間に隙間がないようにおさめるというのが，3H=6T パズルです．8 個まで入るのは自明ですが，9 個入れるところでパズルになっています．ピースの間に隙間がないという制約は，単なる試行錯誤ではなく考えながら解くためのヒントとなっています．また，この制約により解が立方体の回転を除いて一意なものになるのですが，その美しい形に興味を持ってもらうことが，授業でのこのパズルの目的です．

実は，H と T は下図のように 3 次元空間を充填します[3]．T は 8 面体なので，充填形

図 3: H と T による空間充填と，パズルの解.

[1] H は 2 通りでイマジナリーキューブになっており，6 方向の射影で正方形になります.

[2] H や T をフラクタルにしたものもイマジナリーキューブになっており，それがイマジナリーキューブ研究の原点なのですが，それについては割愛します [3].

[3] この充填形は，立方格子と，それを x=y=z の軸の周りに 60 度回転させた立方格子の和集合という点集合に対するボロノイ分割になっています [2]．H の中心が原点に，H のとがった頂点が $x = y = z$ 上に来るように座標をとって考えてみてください.

の中で周り 8 個の立体と接しているのですが，それら 9 個の立体が立方体の箱にそのまま入り，それが解になっています．この解では，8 個のピースは，箱を 8 分割したそれぞれの立方体に入れた形でおさまっています．そして，それらの立方体から切りとられた隙間を箱の中心に集めて，そこに T がおさまる形をしています．

授業では，まず，正四面体，H，T と箱を生徒に配り，それぞれの立体を箱に入れてもらいます．そして，H と T の形の理解を深めたところで，パズルにチャレンジです．パズルを解きはじめてしばらくしたところで，ヒントを順に与えます[4]．8 つまでは小さな立方体におさまるように入れること，9 個目は，真ん中に隙間を集めてそこに入れること，9 個目は H ではなく T になること[5]，隙間なく入れるには同じ形の面どおしが接するように入れる必要があることなどです．下 4 つをきれいに配置すると窪みができて，そこに T がすっとおさまる瞬間が感動的です．また，完成した形が 3 回対称性をもつきれいな形なのも印象的です．

2　パズルを解いてから

生徒たちはパズルを解くことを楽しみますが，パズル自体が授業の目的ではありません．パズルが解けたところで，次のように問いかけます．

> 本当に隙間なくおさまっているの？ 小さな隙間が残っているのに，私がごまかしていることはないの？

生徒はパズルをじっくりと見ますが，もちろん，目で確認して分かるはずがありません．しかし，パズルの上段と真ん中のピースをはずして見ると，周りの立体の頂点位置から，真ん中にあいている穴の形は図 4(c) だと分かります．つまり，箱の真ん中に原点，面の方向に x, y, z 軸をとって考えると，6 個の頂点は座標軸の両側にあり，その原点からの距離は 2 : 1 の比になっています．しかも，その 2 の長さは，T が一つ入る立方体の 1 辺の長さと等しくなっています[6]．このように穴の形が分かるので，(a) と (c) の立体が合同であることを言えばいいことになります．

合同性の一つの証明は，対応する面が同じ形をしており，全ての頂点での面の繋がり方が同じ凸立体だからというものです．しかし，この主張は Cauchy の剛性定理 (1813) として知られているものであり，決して自明ではありません．そこで，他の証明を考えます．

---

[4]成功体験を与えることがこの授業の目的の一つだと思っているので，ヒントを上手に与えて，時間内にみんなが解けるようにすることに腐心しています．

[5]ほとんどの生徒は，真ん中にまず H を入れようとします．対称性の高いものが中心に来るという先入観が強いのでしょう．

[6]T がイマジナリーキューブであると同時に弱十字立体（正八面体のことを十字立体というので，頂点がすべての座標軸の両側にある立体をこのように呼ぶことにします）であることは驚きで，これを広く伝えたいという気持ちが私の一連の活動の動機になっています．

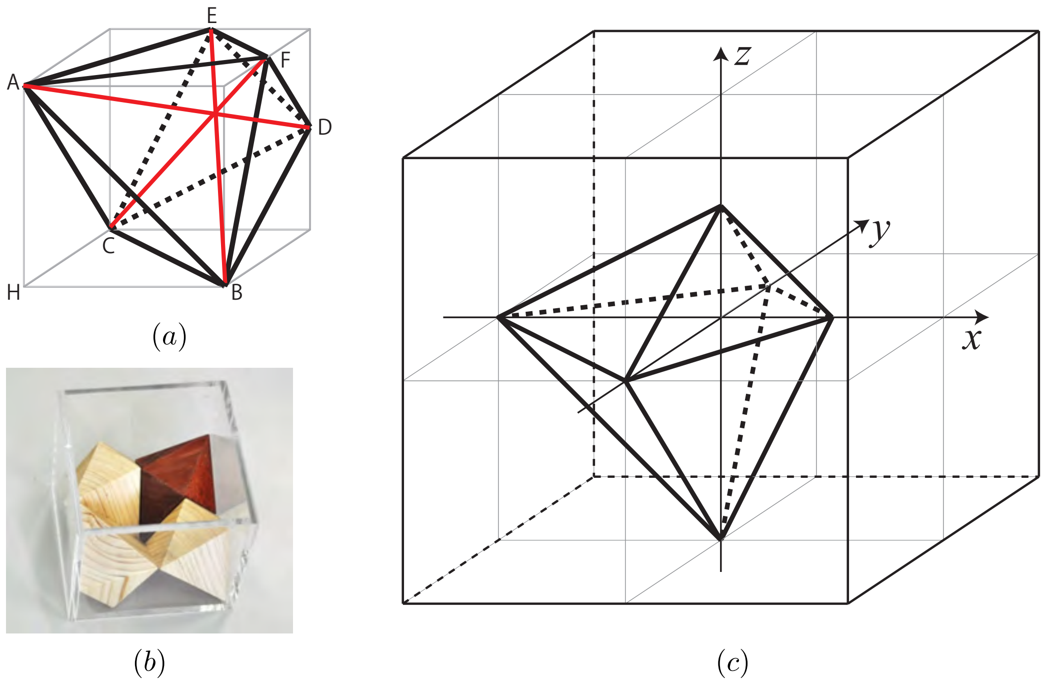


図 4: (a):箱の中の T; (c):座標軸上に頂点がくるように置かれた T.

まず，図 (a) において，T の 3 つの対角線が 1 点で交わり，お互いに直交して，交点までの長さが条件を満たしていることを言えればいいことを説明します．ここからは，中学生向きと高校生向きの 2 つの説明があります．

3 高校生向きの証明

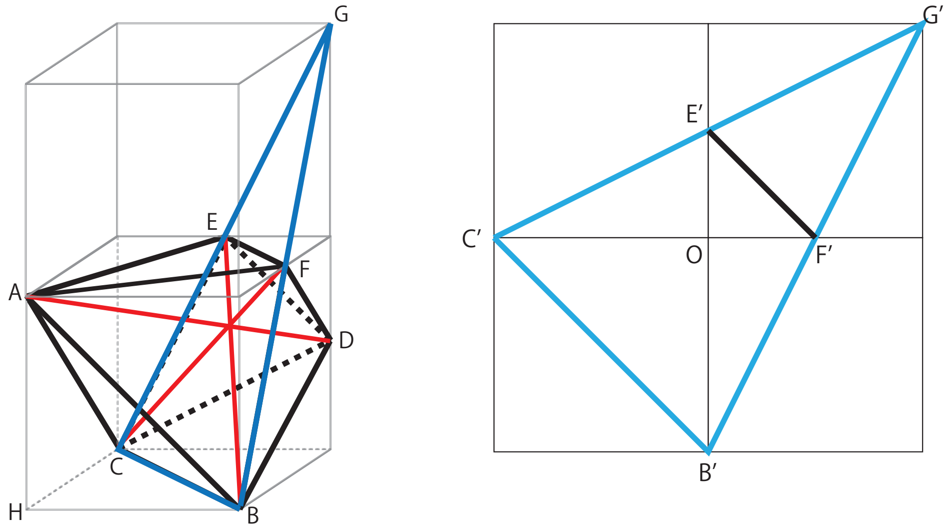
これは，内積を習っていれば，ちょうどいい練習問題です．図 (a) の $\vec{HA}, \vec{HB}, \vec{HC}$ を $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ として $\vec{BE}$ と $\vec{CF}$ を $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ で表現すると，$\vec{BE} = \vec{x} - \vec{y}/2 + \vec{z}$, $\vec{CF} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}/2$ となります．これらの内積を黒板で計算して 0 になった時，生徒たち（の少なくとも何人か）は興奮してくれました． 1 点で交わることの証明や交点までの距離を求めることも，標準的な空間図形の問題です．これが教科書の練習問題として与えられても味気ないですが，パズルで動機付けされていると，印象は強いはずです．

4 中学生向きの証明

中学生でも，高学年になってピタゴラスの定理が使えるようになると長さの計算による証明が可能になります．しかし，そのような計量的な方法を使わずに幾何的に示す方

法があります．これだと，平方根も知らなくていいし，三角形の合同についても小学校で学ぶ直感的な話だけで十分なので，中学 1 年生でも理解できます．

BE と CF が直交することを証明しましょう．この立方体の上にもう一つ立方体を付け加えて下図 (a) を考え，図のように頂点 G をとり，二等辺三角形 GCB を考えます．すると，E と F は，それぞれ辺 GC, GB の中点です．よって，4 点 C, B, F, E は同一平面上にあり，四角形 CBFE は，この二等辺三角形の下半分の等脚台形になります．この等脚台形 CBFE において 2 つの対角線が直交することを示します．



(a) (b)

図 (b) のように，1 辺の長さが立方体の 1 辺と同じ正方格子を考えて，点 C', B', G' をとって，二等辺三角形 G'B'C' を考えます．GBC と G'B'C' を見比べると，3 つとも辺の長さが等しいです．平方根を習ってなくとも，辺の長さが等しいことは分かります．よって，この 2 つの三角形は合同な二等辺三角形です．さて，E', F' はそれぞれ G'C', G'B' の中点です．よって，CBFE と C'B'F'E' は同じ二等辺三角形の下半分で，同じ等脚台形です．そして，台形 C'B'F'E' をみると，証明したいことは一目瞭然です．

中学生にこの説明をするために黒板に (b) の三角形を描いてると，背後から「すげー」という声が聞こえてきました．こういう感動が，数学を好きになる原動力なのだと思います．その一方で，こんなひらめきをしないといけないのかと思うと，自分に数学ができるのか不安がよぎるのも確かです．ですので，中学生には，高校生になると計算で機械的に示せるようになることも伝えるようにしています．

5　おわりに

イマジナリーキューブ，特に，H と T の織りなすきれいな幾何学に出会ってから，数学と芸術，あるいは，数学とパズルの関係について考えるようになりました．数学的に定義された形には人を魅了する美しさがあるし，パズルを解く楽しみは数学を考える楽しみに通じるところがあります．しかし，それに触れただけでは，数学の本質は伝わらないように思います．数学の本質は，美しい構造を理解すること，それも，論理と証明によって裏付けしながら理解することだと考えています．このパズル以外にも，イマジナリーキューブを用いた授業をいくつか考えましたが，生徒に手作業を楽しませて興味をひいたうえで，証明をつけて納得してもらうように心がけています．

昨年までの授業は，積み木インテリアギャラリーいたち丸に作っていただいた木製のパズル[7] を１０個用意して，クラスをグループに分けて，グループごとにパズルを解いていました．しかし，今年は新型コロナ感染症のために，それが難しくなってしまいました．そこで，3D プリンタで 40 個のパズルを制作し，各生徒が一つのパズルを使うようにして，この９月以降に，洛北高等学校附属中学校，園部高等学校附属中学校，乙訓高等学校を訪問し，中学生，高等学校生に対して出前授業を行いました．木の多面体が正確にできており，パズルにちょうどいい摩擦力と質感をそなえていたのに対し，3D プリンタで作ったものは思ったほど精度が出ず，箱へのおさまりも悪く，さらに，出来合いの箱を使うために小さめに作ったために，扱いにくいものになってしまいました．グループで共同してパズルを解いた方が生徒は楽しそうですし，全てのパズルが完成するまでにかかる時間も短くてすみます．しかし，考える力を身につけるためにも，また，幾何学的な構造をじっくり観察するためにも，ひとり 1 個のパズルを用意して正解だったと思います．

いろんなパターンの授業を行いましたが，1 コマ 50 分の授業でパズルと証明の両方を行うのは，かなり無理がありました．2 時間連続の授業だと，間の休み時間に全員がパズルを完成させることができ，後半で周辺的なことも含めてゆっくり話をできました．今年は大学ではオンライン授業ばかりで，生徒の前でライブで授業をすること自体が久しぶりです．生徒たちの生き生きとした表情はマスク越しでも伝わってきて，夏休みに 3D プリンタと格闘した甲斐があったと思います．コロナ禍での授業実施にご協力いただいた各学校の先生方に感謝いたします．

このように，このパズルを用いると，パズルを解く楽しみに加えて，立体図形の奥深さや証明の喜びを教えることができます．これを私が行うだけではなく，他の先生方にも使ってもらえるように， 今回制作した 40 個セットのパズルを教育現場に貸し出せるようにできないか考えております．詳しくは，イマジナリーキューブに関する Web ページ [4] を作成しておりますので，そちらを御覧いただければと思います．

---

[7] [1] に付いているパズルと同じものです．

参考文献

[1] 立木秀樹 『イマジナリーキューブ・パズル 3H=6T』 (3H=6T パズル付きの本) 京都大学総合博物館ミュゼップ, Kyoto, 2012.

[2] Hideki Tsuiki, Imaginary Cubes and Their Puzzles, Algorithms 2012, 5(2), 273-288; doi:10.3390/a5020273. https://www.mdpi.com/1999-4893/5/2/273

[3] 立木秀樹 『イマジナリーキューブ・パズル』 2013 年度日本数学会応用数学分科会「ゲームとパズル」スペシャルセッション予稿.
http://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/~tsuiki/papers/suugakukai.pdf

[4] イマジナリーキューブ Web ページ. http://u.kyoto-u.jp/imaginarycube

（文責：立木　秀樹（ついき ひでき））