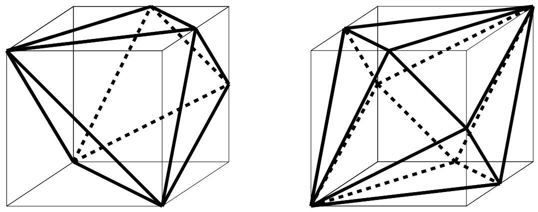
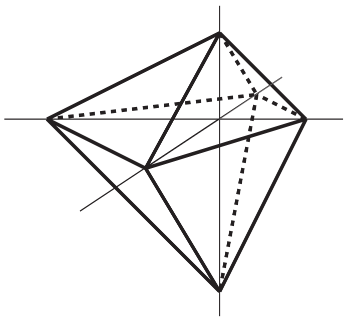
問題 (数学セミナー 2021 年 3 月号原稿)



左は，一辺の長さが 1 の立方体の，お互いに隣り合わない 3 頂点と，それらを含まない 3 辺の中点を頂点とする八面体です。右は，一辺の長さが 1 の立方体の，相対する 2 頂点と，それらを含まない 6 辺の中点を頂点とする十二面体です。

(1) 左の八面体が，互いに直交する 3 直線の、交点の両側で交点から 1 と 1/2 の点を頂点とする八面体と合同であることを示してください。

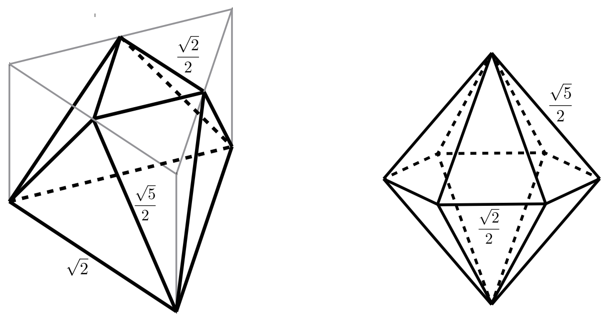


(2) 一辺の長さが 2 の立方体に，左の八面体 6 個と右の十二面体 3 個を入れる方法を考えてください。8 個なら自明ですが，9 個あります。どうやったら入るのでしょうか。

解説 (数学セミナー 2021 年 6 月号原稿)

このパズル的な問題に対して，高校生からご高齢の方まで、55 名の方 (10 代 2 名，20 代 1 名，30 代 4 名，40 代 1 名，50 代 13 名，60 代 23 名，70 代 9 名，90 代 1 名，年齢不詳 1 名) から解答をいただきました。みなさん楽しんで頂けたようで，模型を作って写真を送ってくれた人が何人もいました。実は、この 9 個の多面体を立方体の箱に入れるパズルは、「イマジナリーキューブパズル 3H=6T」 という名前で，9 年前に京都大学総合博物館ショップから商品化しています [1]。それを問題として出すことに多少の躊躇がありましたが，出してよかったと思っています。

イマジナリーキューブは、立方体と同じように、直交する 3 方向への射影が正方形になる立体につけられた名前です。図からわかるように，ここに示した 2 つの立体もイマジナリーキューブです。この 2 つの立体は，次のように与えることもできます。



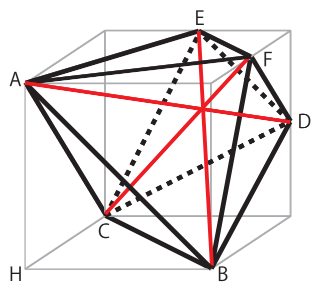
左は、底辺 $\sqrt{2}$, 高さ $\sqrt{3}/2$ の正三角柱の片方の底面の各頂点の周りを，底辺の中点と反対側の頂点を結んだ三角形で切った形です。あるいは、底辺 $\sqrt{2}$, 高さ $\sqrt{3}$ の正三角錐を半分の高さで切ってできた三角錐台の、上の面を 60 度回転させた立体（反三角錐台, Triangular Antiprismoid）ということもできます。もう一つの立体は、底辺 $\sqrt{2}/2$, 高さが $\sqrt{3}/2$ の 2 つの正六角錐を底面でくっつけた形 (重六角錐、Hexagonal Bipyramid) です。これらの立体がイマジナリーキューブであり，立方体の箱にきれいに収まると言われても，すぐには分からないと思います。このように，きれいな立体は，いろんな方法で定義される面白さがあります。これら 2 つの立体は，反三角錐台, 重六角錐の中でも，イマジナリーキューブになるような特殊な高さのもので、T および H と

呼ぶことにします。

H と T は次のようにも定義できます。H は 6 回対称性を持っているので，二通りの方法で立方体の箱に入れることができる「ダブル・イマジナリーキューブ」です。よって，H は，互いに対角線の周りに 60 度回転した位置関係にある 2 つの立方体の共通部分ともいえます。また，問題 (1) が示すように，T は座標軸上に頂点をとってできた立体でもあります，原点からの距離をすべて等しくとったら正八面体になるので，T は，正八面体を変形したものということもできます。

1　(1) の解答

(1) は、高校数学のベクトルの，いい練習問題です。下図のように記号をふります。



そして，$\vec{a} = \vec{\mathrm{HA}}$, $\vec{b} = \vec{\mathrm{HB}}$, $\vec{c} = \vec{\mathrm{HC}}$ とおいて，

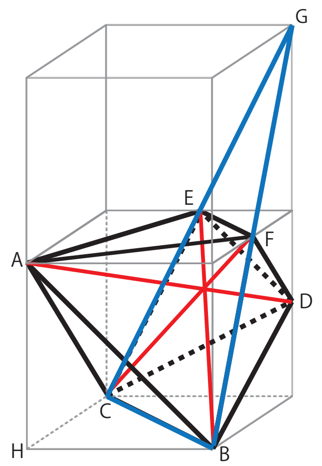
$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{AD}} &= -\vec{a}/2 + \vec{b} + \vec{c}\\ \vec{\mathrm{BE}} &= \quad \vec{a} - \vec{b}/2 + \vec{c}\\ \vec{\mathrm{CF}} &= \quad \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}/2\end{aligned}$$

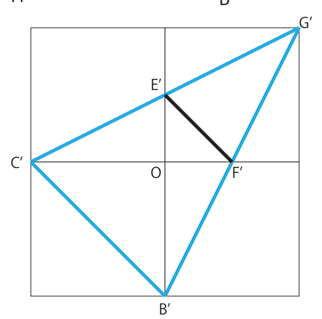
を用いて内積を計算すると $\vec{\mathrm{AD}} \cdot \vec{\mathrm{BE}} = \vec{\mathrm{BE}} \cdot \vec{\mathrm{CF}} = \vec{\mathrm{CF}} \cdot \vec{\mathrm{AD}} = 0$ となります。また，$\vec{\mathrm{HO}} = 2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})/3$ となる点 O が 直線 AD, BE, CF の全てにのっていること，$\mathrm{AO} = \mathrm{BO} = \mathrm{CO} = 1$, $\mathrm{DO} = \mathrm{EO} = \mathrm{FO} = 1/2$ であることが計算から分かります。よって，O が原点，直線 AD, BE, CF がそれぞれ x, y, z 軸になるように座標をとると， T が (1) の問題文の八面体と一致することが分かります。

多くはこの解法でした。座標を導入して、両者の変換を行う平行移動や回転行列を具体的に与えるものもありました。また、幾何的な説明もありました。例えば、両方とも，一辺の長さが 1 と 1/2 の正三角形の平行な面をもち，両底面の重心を結ぶ直線と底面が垂直で，この線にそって小さな底面の頂点を平行移動すると，大きな底面の辺の中点にきます。つまり，両方とも反三角錐台です。そして，両者の高さが等しいので合同です。

また、両方とも凸多面体で，面の対応関係があり，対応する面が全て合同でつながり方も同じだから，あるいは，展開図を考えたら同じだからという説明もありました。これは、コーシーの剛性定理と呼ばれるものを利用しています。ここで注意が必要なのは、面の対応があり，対応する面が合同なだけでは、二つの多面体は合同といえないことです。全ての面が三角形である 8 面体に限ったとしてもです。例えば、同じ正方形の底面を持つ四角錐を 2 つくっつけた形を考えましょう。ただし、両方の四角錐で，上にくる頂点は正方形の中心や辺ではなく、正方形内の一般の位置の真上にあるとします。そして，正方形の面で片方の四角錐だけを 90 度回転させると、合同な面をもつが、合同でない八面体ができます。面のつながり方を意識しているか分からない解答もありましたが、多目に見て正解にしました。

私は、もっと初等的な証明も用意していました。T を含む立方体の上にもう一つ立方体を乗せて下図のように頂点 G をとり，二等辺三角形 GCB を考えます。



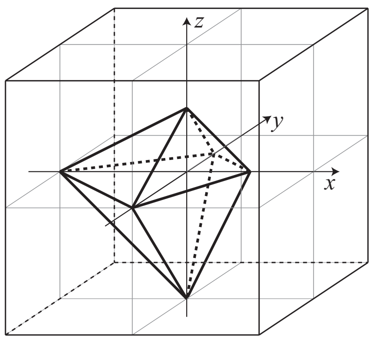


すると，E, F は，辺 GC, GB の中点なので，BE

と CF が直交することは，二等辺三角形に関する平面図形の問題として考えることができます。一方で，右図のように 1 辺の長さ 1 の正方形を 4 つ並べて，二等辺三角形 G'C'B' を考えます。すると，この両者は，3 辺の長さが同じなので合同です。そこで，G'C' と G'B' の中点を E', F' とおくと，B'E', C'F' が直交して，交点から頂点への距離が，それぞれ 1 と 1/2 であることは一目瞭然です。よって，BE, CF にも同じことがいえます。この証明は，辺の長さとなる $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ という数をまだ習っていない，中学 1 年生でも理解できるはずです。

2 (2) の解答

(1) は (2) のヒントになっています。



上図のように，2 倍の大きさの立方体の，中心に原点をおき相対する面の中心をつなぐ直線を座標軸にとり、その座標に対して (1) で示されたように T を配置します。大きな立方体は，8 つの象限の 8 つの小立方体に分けられています。この T の頂点はすべて座標軸上にあるので，小立方体の辺上にしかないことに注意してください。そのことにより，T の 8 つの面が，それぞれの小立方体の，一つの頂点のまわりを切ることになります。その切口の形は，T の面の形です。すなわち，(a) 小さな正三角形，(b) 大きな正三角形，3 つの (c) 太い二等辺三角形，3 つの (d) 細い二等辺三角形です。T はもともと，立方体の 5 つの頂点の周りで (a), (b), それに (c) 3 つを切り取った形として与えられていました。ですので，(a), (b), (c) で切り取られた，合わせて 5 つの小立方体の中に T を入れることができます。また，H は，立方体の 6 つの頂点の周りで (d) を切り取った形でした。よって，(d) で切り取られた 3 つの小立方体には H が入ります。このようにして，真ん中の T も合わせて H 3 個，T 6 個を大きな箱の中に入れることができます。

このように，上の図を描いてしまえば，(2) はほとんど自明です。この入れ方だと，箱との間には隙間が残りますが，立体の間には隙間を残すことなく入れることができます。隙間が残らない入れ方は，立方体の回転で同じになるものを同一視すると，この一通りだけです [3]。

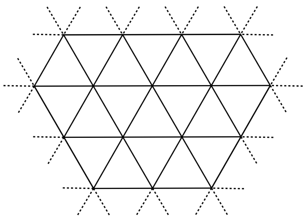
この問題では隙間を残さずに入れることを求めていないので，これ以外にも解が存在します。(a) で切り取られた小立方体には，(b) や (c) の面が (a) のところに来るように T を入れることもできますし，H も入れることができます。(c) で切り取られた小立方体には (b) の面が (c) のところに来るように T を入れることができます。(d) で切り取られた小立方体には，(b), (c) の面が (d) のところに来るように T を入れることもできます。さらに，(c) や (d) の形に 3 回対称性がないので，回転させて入れることも考えれば，たくさんの入れ方が考えられます。

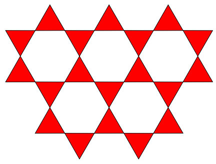
解答は，図を用いて説明したもの，立体を作って写真を送ってきたものなど，様々でした。入れ方がわかるように書いてあるか，入れられることの論理が分かるように書いてあるものは正解にしました。説明はあってるのに，入れ方を説明した図が間違っていたり，立体の工作の精度が悪いために，本当は入るはずのない入れ方で入ってしまっているものは不正解にして，51 通を正解としました。

上図のように真ん中に T を配置しない解はありませんでした。10 年以上このパズルで遊んできて，それは不可能だと信じていますが，どう証明したらいいか分かっていません。それこそ，エレガントな解答を求めています。

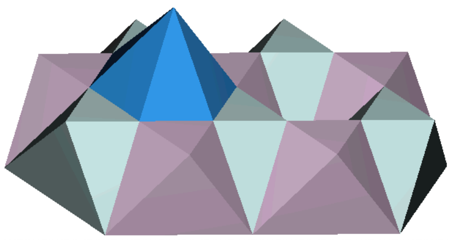
3 空間充填

このパズルの背景にある数学の話をさせてください。隙間を残さない解は，直線 $x = y = z$ の方向から見るときれいな三回対称性をなしています。このように，このパズルは，立方体を頂点方向から見たときになす 3 回対称性と深い関係があります。





H と T を隙間なく入れられるということでお気づきかもしれませんが，H と T で，この 3 次元空間を空間充填することができます。 上左図は，一辺が $\sqrt{2}$ の三角格子です。この各正三角形に大きな正三角形が来るように T を敷き詰めます。すると，T の上部の小さな正三角形は，上右図のように，もとの三角格子の頂点のところに正六角形のくぼみを残し，正三角形と正六角形による平面充填形の模様をなします。この正六角形のくぼみには，H がきれいにおさまります。



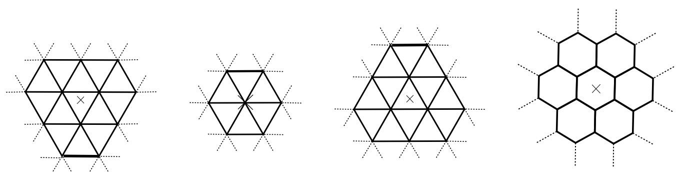
H をすべてのくぼみに入れてから，T を上下反対にしてかぶせていきます。すると，全体が板状になります。それをいくつも重ねると，H と T による空間充填が出来上がります。 T は八面体なので，この空間充填の中で 8 つの立体と接しています。それら 9 つの立体を箱に詰めると，このパズルの解になります。

この空間充填は，空間のボロノイ分割の概念を用いて簡潔に表現できます。

まず，平面のボロノイ分割について説明します。平面上に，点集合 D が与えられたとします[1]。その時，どの D の点が一番近いかによって平面上の点を分割すると，多角形（セルと呼ぶことにします）による平面の充填（ボロノイ分割）ができます。同じことを 3 次元で行うと，多面体による空間のボロノイ分割ができます。点集合 D によるボロノイ分割に一点 p が加わると，それまであったセルが，そのセルを作る D の点と p の垂直二等分線 (3 次元の場合には垂直二等分面) で切り取られて，新しいセルがつくられます。このイメージを持っていると，以下の説明が分かりやすくなります。

さて，無限に広がった立方格子 L を考えましょう。L に対してボロノイ分割を行うと，立方体による空間充填ができます。L を $x = y = z$ の軸の周りに 120 度回転させると L に戻ります。そこで，L を 60 度だけ回転させた立方格子を L' としましょう。そして，L と L' の和集合 $D = L \cup L'$ をとって，D に対するボロノイ分割を行います。すると，H と T による空間充填ができます。D の点は $L \cap L'$ とそれ以外に分かれますが，$L \cap L'$ の点の周りには H の形をしたセルができます。そして，それ以外の点の周りには T の形をしたセルができます。

もう少し詳しくみていきましょう。まず，この 60 度回転で，平面 $x + y + z = k$ $(k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ 上の点は，同じ平面上にうつります。それぞれの平面上で， 立方格子の点は三角格子をなしていますが，回転軸 $x = y = z$ との交点と格子の関係は，k の値によって異なります。



(a)$k = 3m - 1$　(b) $k = 3m$　(c) $k = 3m + 1$　(d)

$k = 3m$ の時には格子点 (図 b)，$k = 3m + 1$ では上向きの三角形の重心 (図 c)，$k = 3m - 1$ では下向きの三角形の重心 (図 c) で回転軸と交わります。(b) は 60 度回転で保たれますが，(a) と (c) は，60 度回転で交換されます。(a) と (c) の格子の和集合をとると，(d) の正六角形による平面充填の頂点になります。よって，D の点は，直線 $x = y = z$ の方向を上下にとって，$x + y + z = k$ $(k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ の層の重なりと考えると，$k = 3m$ の層では (b)，$k = 3m \pm 1$ の層では (d) のように配置されています。そのボロノイ分割ですが，(d) のボロノイ分割が正三角形による平面充填なので，(b) の層がなければ正三角柱をセルとする分割になるのは明らかでしょう。それに，$k = 3m$ の層の点が加わるのですが，それらの点は，三角柱の頂点に位置しています。そこを中心に H のセルができ，各三角柱から 3 つの

[1]ここでは，D は離散的で一様に広がっている (ある $d > 0$ に対し，平面のどの点の d 近傍にも 1 個以上有限個の D の点がある) とします。

頂点の周りが切り取られて T になるのですが，そのことは，パズルの解に沿って説明しましょう。

図 4 の座標のもと，(2) で考えた 8 つの小立方体の中心を拡張した立方格子 L を考えます。全ての座標が整数の点ではなく，全ての座標が $n+1/2$ (n は整数) の形をした点のなす立方格子を考えていることに注意してください。$(1/2,-1/2,1/2)$ (H を含む小立方体の中心です) を L の原点として，上で述べた構成を行います。つまり，この点を通る直線 $x-1/2=y+1/2=z-1/2$ の周りで L を 60 度回転した格子 L' を考え $D=L\cup L'$ に対するボロノイ分割を行います。まず，L に対するボロノイ分割を行うと，立方体による空間充填ができます。それに L' の点が加わることにより，原点 (0,0,0) の近くにどのようなセルができるか考えます。$(1/2,-1/2,1/2)$ を中心とした立方体を直線 $x=y=z$ の方向から射影してできた正六角形をもとにして考えると，$(-1/2,-1/2,1/2)\in L$ にこの回転をほどこした点は，直線 $x=y=z$ 上にあることがわかります。また，平面 $x+y+z=-1/2$ に乗っているはずなので，その点は $O'=(-1/6,-1/6,-1/6)$ です。O' の周りのセルの形を考えます。それは，O' と L の各点との垂直二等分面に囲まれた多面体ですが，例えば，$(-1/2,-1/2,-1/2)\in L$ と O' から，$\{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$ の各点までの距離が等しいことから，この 3 点を通る面がそのような垂直二等分面です。同様にして調べると，そのセルの形は T であることが分かります。

ところで，点集合 D にはたくさんの対称性があり，$L\cap L'$ の任意の 2 点 A,B に対して，A を B に移して D の形は保存する等長変換が存在します。$D\setminus L\cap L'$ の 2 点についても同様です。よって，このボロノイ分割は，2 種類のセルからなります。片方は T でした。そのことから，もう片方は H だと分かります。

4　中学・高校での授業

ここ数年、中学生、高校生を相手に、このパズルを用いた数学の出前授業を行ってきました。一昨年まではグループでパズルを解いていましたが，昨年はコロナ禍でグループワークが制限される中，3D プリンタを用いてパズルを 40 セット作り，一人 1 つのパズルで授業を行いました。2 時間連続の授業の時には，1 時間目はパズルを解いて楽しんでもらいます。授業では，立体の間に隙間が残らないように入れることをパズルのゴールにします。制約が与えられるとパズルが難しくなるように思うかもしれませんが，同じ形の面が接することになるので，逆にパズルが解きやすくなります。下に 4 つ入れたところで，真ん中の穴にきれいに T が収まった時の生徒の表情が楽しみです。

数学の授業としては，ここからが本番です。全員が解けたところで，次のように問いかけます。

> 本当に解けてるの？
> 私に騙されて思い込んでいるだけで，ピースの間に小さな隙間が残っていることはないの？

周りの 8 つの立体は，立方体の箱に入るように入れているので，その頂点の位置は明確です。それから，それららが真ん中に作る空洞の形は，問題 (1) の形だとわかります。よって，問題 (1) を解けば，隙間なく立方体の箱に入れたことになります。

しばらく考えさせてから，高校では，ベクトルを用いた解法を黒板で行います。中学では，図形的な証明を行います。数学的内容としては (1) の問題を出すのと同じですが，解きたい，知りたいという気持ちや，分かった時の感動は違うと思います。時間がなくてパズルを解くだけで終わってしまうこともありますが，楽しみながら立体図形に対する興味を持つだけでも，十分に価値があると感じています。

自分でもこのパズルを用いた授業を行ってみたいという方がおられましたら，3D プリンタで作成したパズルをお貸しします。詳しくは私のホームページ [2] をご覧ください。

京都大学総合博物館ショップで作っていただいた木製のパズルは製造が中止されていますが，新しくプラスチック製のパズルを製造する計画が進んでいます。機会がありましたら，H と T を手にとって楽しんでいただければと思います。

参考文献

[1] 立木秀樹『イマジナリーキューブ・パズル 3H=6T』(3H=6T パズル付きの本) 京都大学総合博物館ミュゼップ, Kyoto, 2012.

[2] イマジナリーキューブ Web ページ. http://u.kyoto-u.jp/imaginarycube

[3] Hideki Tsuiki, Imaginary Cubes and Their Puzzles, Algorithms 5(2), 273-288, 2012.