イマジナリーキューブ（３）

立木 秀樹

立方体と同じように直交する３方向から正方形に見える立体のことをイマジナリーキューブと名づけ、それについて調べてきました。連載の１回目では極小凸イマジナリーキューブが１６種類あることを紹介し、その代表元の中に、重六角錐イマジナリーキューブと反三角錐台イマジナリーキューブという、とてもいい性質を持ったものが存在することを述べました。２回目では、相似次元２のフラクタルイマジナリーキューブについて調べ、それが、ラテン方陣と対応して存在することを述べました。

最終回となる今回は、重六角錐と反三角錐台の２つのイマジナリーキューブが空間充填する話を述べ、その応用として、イマジナリーキューブを用いて作られたパズルと、１６種類のイマジナリーキューブを合わせて作られたオブジェの話をします。

1　重六角錐イマジナリーキューブ (H) と反三角錐台イマジナリーキューブ (T)

重六角錐イマジナリーキューブと反三角錐台イマジナリーキューブの復習をしましょう。重六角錐イマジナリーキューブは、底辺：高さ=2:3 の二等辺三角形の側面をもつ正六角錐２つを底面で貼り合わせた十二面体（重六角錐）です（図 1, H)。また、反三角錐台イマジナリーキューブは、底辺:高さ=4：$\sqrt{6}$ の正三角柱の片方の底面の各頂点の周りを、底面の辺の中点と反対側の底面の頂点を通る面で切ってできた反三角錐台です（図 1, T)。以下省略して、これらの立体を H (Hexagonal Bipyramid の頭文字) と T (Triangular Antiprismoid の頭文字) と呼ぶことにします。

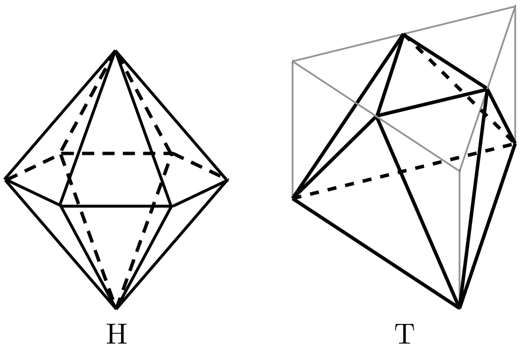


図 1: 重六角錐イマジナリーキューブ (H) と反三角錐台イマジナリーキューブ (T)

H と T は図２のように立方体の箱に入れることができ、イマジナリーキューブです。特に、これらは立方体を切ってできているのですが、これ以上切ると立方体のどちらかの面から見て正方形に見えなくなってしまいます。つまり、極小凸イマジナリーキューブです。

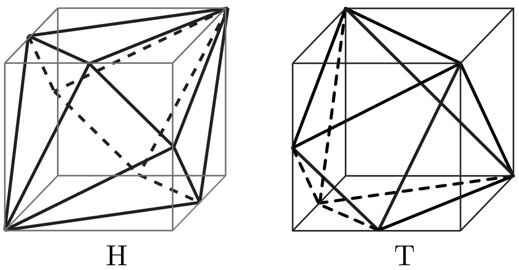


図 2: H と T の立方体の箱への入れ方

この２つの立体は、第１回で紹介した１６個の極小凸イマジナリーキューブの中でも特にいい性質を持っています。H は６回対称軸を持っており、１２個の面に対称性があります。そして、図２のように面に垂直な方向から見て正方形に見える立体なので、３方向ではなく６方向から見て正方形に見える立体です。また T において、相対する頂点を結ぶ３つの直線は直交しており１点で交わります。つまり、これらの直線を座標軸にとると各座標軸の正と負の部分に１つづつ頂点が存在し、原点から頂点までの距離は、イマジナリー

キューブとして T が入る立方体の１辺の長さを１とした時、片方は１、もう片方は 1/2 です。このように T は、立方体の箱の中だけでなく、立方体を並べた格子の頂点にも収まります（図 3）。図 3 の２つの立方体に図２のように T が に入っているとした時、これら３つの T は２つの正三角形で接しています。このことが、今回の話で重要な意味を持ちます。

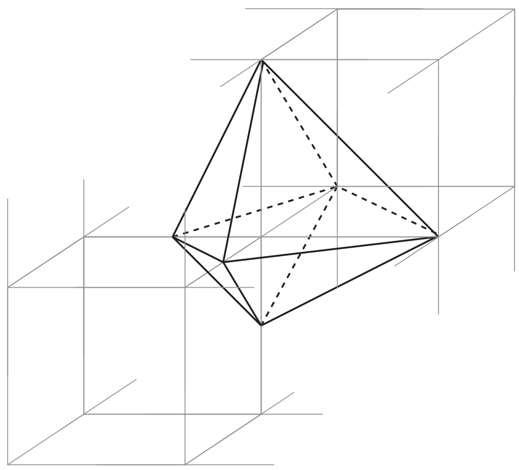
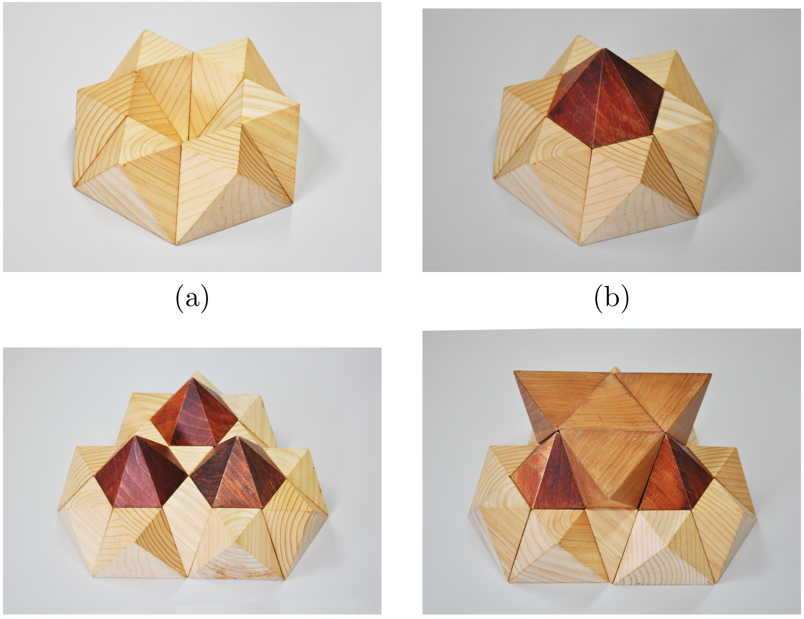


図 3: 立方格子の頂点のまわりでの T の配置

2　H と T による空間充填

この２つの立体は、図 4 のように３次元空間を充填します。

まず、T は図 4(a) のように並べることができます。すると、真ん中に正六角形の穴ができますが、そこに H がきれいにおさまります (図 4(b))。T をさらに並べてできた穴に H を入れていくと、正三角形と正六角形の平面充填のように (b) を平面全体に広げていくことができます (図 4(c))。さらに、H は上下対称なので、T を逆さにして上に置いていくことができます (図 4(d))。これで上面は平らになり、全体が板状になるので、こうしてできたものを無限に積み重ねることによって、空間を充填できます。立方体の箱に入るということから考えた立体がこんなにきれいな性質を持つのは、不思議ではありませんか？



(a) (b)

(c) (d)

図 4: H と T による３次元空間充填

3　立方体の配置と空間充填の関係

H と T が立方体に入るという性質とこの空間を充填するという性質とはどういう関係にあるのでしょうか。

前回お話したように、立方体を $3 \times 3 \times 3$ の２７個の小さな立方体に切って、その中から９個をお互いに重なりのないように選ぶ選び方は図５の (H) と (T) の２通りあり、それらを縮小写像とするフラクタル、すなわち同じ作業を９個の立方体に繰り返し行った極限の立体はフラクタル・イマジナリーキューブとなっており、その凸胞をとると、H と T が得られるのでした (図５)。

(H) と (T) の配置には重なりがなく、９個の立方体が残されています。その配置を (T') とします。(T') は回転により (T) と同じものになります。

ここで、(H) の配置で９個の立方体の代わりに H を配置したもの、および、(T) と (T') の配置で、立方体の代わりに T を配置したものを考えます。ただし、H と T の向きは、図５および図６の右端に示したものにします。この節では立体がどの向きに置か

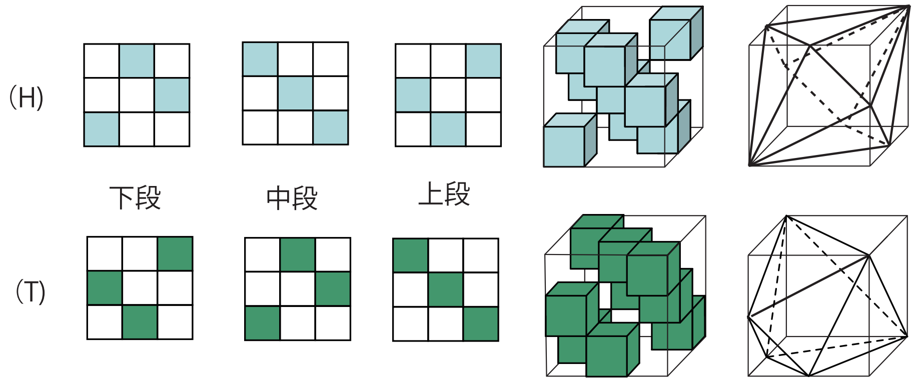


図 5: 27 個の立方体から重なりなく 9 個選ぶ方法

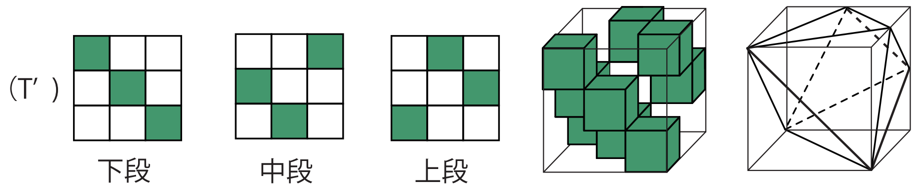


図 6: 残りの 9 個を選ぶ方法

れているかも含めて考えたいので、図 6 の T を平行移動して得られる T は T' とよび、T といえば、図 5 の T を平行移動して得られる T を指すことにします。こうしてできた 3 つの立体は、それぞれの配置が作るフラクタルの 1 次近似となっており、それ自体がイマジナリーキューブとなっています（図 7)。

さて、これら 3 つの立体を合わせてできる立体を考えます。(H), (T), (T') を合わせると 1 つの立方体になりますが、それを構成する各立方体を H, T, および T' に置き換えてできたものですから、中に隙間があります。それらの隙間の形について考えていきます。まず、27 個の立方体に、左下手前を原点として、右向きに x, 奥に y, 上に z 座標を入れます。すると、(H), (T), (T') の 9 つの立方体は、それぞれ、

(H) の場合には $x + y + z = 0 \pmod 3$,

(T) の場合には $x + y + z = 1 \pmod 3$,

(T') の場合には $x + y + z = 2 \pmod 3$

図 7: H と T の 1 次近似立体 (T は T' の向き)

上にあることが分かります。

さて、この２７個の多面体を含んだ大きな立方体を格子状に無限に並べて 3 次元空間を埋め尽くしでできる、小さな立方体のなす立方格子を考えましょう。その上に、上の座標を拡張して座標を入れます。すると、立体 H は $x+y+z=0 \pmod 3$ 上に、T は $x+y+z=1 \pmod 3$ 上に、T' は $x+y+z=2 \pmod 3$ 上に来ることが分かります。このように、$x=y=z$ に垂直な面上に、H, T, T' がきれいに並んだ層構造が出来ています。

今度は、立方体のなす格子の代わりに、立方体の頂点がなす立方格子を考えます。立方体のなす格子における、原点にある立方体の左下手前側の頂点に原点が来るようにします。そして、それぞれの立方体の中に置かれている H と T の頂点の中で、この格子上にあるものの位置を調べましょう。(そのような頂点を、1 回目の連載で頂-頂点と呼びました。) まず、上に見たように、H, T, T' が、それぞれ $x+y+z=0$ に平行な面上に配置されていることから、格子上に H の頂点が一つあれば、それを通ってこの面に平行な面上の格子点全てに同じ H の頂点があることが分かります。T や T' についても同様です。立方体のなす格子の原点にある H は、頂-頂点が (0,0,0) と (1,1,1) にあります。よって、$x+y+z=0$ 上と $x+y+z=3$ 上の格子点は、全てどれかの H の頂-頂点になっています。また立方体の格子で (1,1,1) の位置にある H は、この格子の (1,1,1) と (2,2,2) を頂-頂点としています。このように、(1,1,1) は 2 つの H の頂-頂点です (図 8)。

同様にして、

$$x + y + z = 0 \pmod 3$$

上の全ての格子点は 2 つの H の頂-頂点です。

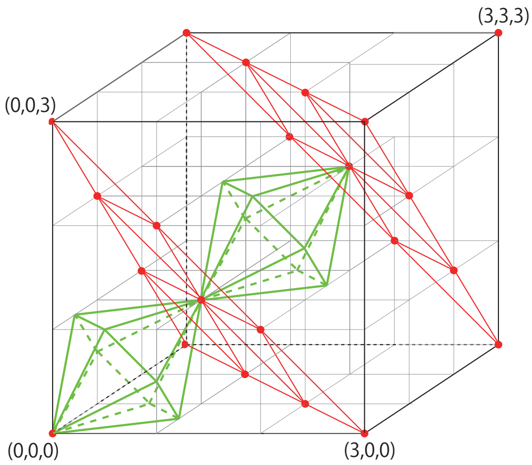


図 8: 頂-頂点の配置

また、立方体の格子で (1,0,0) に位置する T は３つ頂-頂点を持ってますが、３つとも $x + y + z = 3 \pmod 3$ に乗っています。(2,0,0) に位置する T' もそうです。そのことから、$x + y + z = 0 \pmod 3$ 上の格子点はすべて、3 つの T の頂-頂点であり、3 つの T' の頂-頂点でもあります。

まとめると、$x+y+z = 0 \pmod 3$ 上の格子点は、この頂点の周りの８つの立方体 (2 つの H と３つの T と３つの T') の頂-頂点です。また、$x + y + z = 1 \pmod 3$, $x + y + z = 2 \pmod 3$ 上の格子点には、その周りのどの立体の頂-頂点もありません。よって、それらの格子点のまわりに空間が広がっています。H および T において、頂-頂点でない頂点のことを辺-頂点とよびましたが、辺-頂点は、その立体を囲む立方体の、頂-頂点を含まない辺の中点でした。頂-頂点についての上の考察から、この格子のどの辺についても、その周りの４つの立体について、その辺上に辺-頂点があるかどうかは一致しています。

このように、頂-頂点は８つが格子点に、辺-頂点は４つが格子の辺上に集まっています。これらのことか

ら、$x+y+z=1 \pmod 3$ と $x+y+z=2 \pmod 3$ 上の格子点の周りには、８個の立体の８個の面がありますが、それらは辺を共有し、八面体を作っていることが分かります。そして、頂-頂点は $x+y+z=0 \pmod 3$ 上にあることから、その格子点から見て、各座標軸について、ある方向に頂-頂点があれば反対側は辺-頂点があります。すなわち、この八面体も T と同じ形をしています。その向きは、$x+y+z=1$ (mod 3) 上のものは T を x = y = z 方向の軸の周りに 60 度回転させたもの、$x+y+z=2$ (mod 3) 上のものは T' を同じ軸の周りに 60 度回転させたものになっています。このようにして、H と T による空間充填の構造が、立方格子を通して理解できました。

4 ボロノイ分割

ユークリッド空間 X 上の点集合 A が与えられたとします。各点 $u \in A$ に対して、A の中で u が一番近い点の集合、すなわち、$X_u = \{x \in X : d(x,u) \leq d(x,a) \text{ for all } A \ni a \neq u\}$ を、u のボロノイ領域と呼びます。すると、X は $X_u(u \in A)$ に分割されます。このようにして得られる空間の分割をボロノイ分割といいます。

３次元ユークリッド空間において、A がある有限個の点集合の 3 次元的な繰り返しでできた集合の場合には、作られるボロノイ図形も、有限種類のボロノイ領域（それは多面体になります）の繰り返しになります。よって、有限種類の多面体による空間充填が得られます。実は、H と T による空間充填は、ある点集合に対するボロノイ分割になっています。そのことを示しましょう。

まず、格子点の中で平面 $x+y+z=0$ に乗っている点集合Ａは、図９Ａの三角格子になります。$x+y+z=1$ 上の点集合も三角格子になりますが、$x=y=z$ の方向から $x+y+z=0$ に射影した像 B は、A と重なりません。さらに、$x+y+z=2$ 上の点集合の射影 C も、A や B と重ならない三角格子になります。そして、$x+y+z=3$ 上の点集合の射影は A に戻ります。

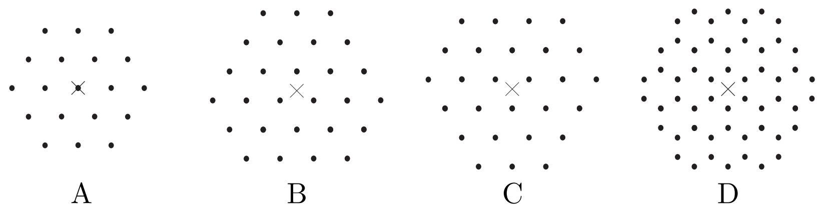


図 9: A, B, C: 立方格子の切断面の x + y + z = 0 への射影。×は原点。A は x + y + z = 0、B は x + y + z = 1、C は x + y + z = 2。D: C と D を合わせたもの。

三次元格子を x = y = z の軸の周りに１２０度回転すると、座標軸を入れ替えるだけで同じ格子に戻ります。そのことは、A, B, C の三角格子が原点の周りで 120 度の回転対称性を持っていることからも分かります。では、６０度回転させるとどうなるでしょうか。A に射影される点、すなわち $x+y+z=0(mod3)$ の点は元に戻ります。それに対して、B に射影される点、すなわち $x+y+z=1(mod3)$ の点は、C に射影される点に写されます。また、 C に射影される点、すなわち $x+y+z=2(mod3)$ の点は、B に射影される点に写されます。これをもとに、三次元格子とそれを $x=y=z$ の軸の周りに６０度回転して得られる三次元格子を合わせた点集合を考えましょう。これは、$x+y+z=0 \pmod 3$ の上には A のように配置され、$x+y+z=1or2 \pmod 3$ の上には、図 9, D のように配置されています。

さて、この点集合に対するボロノイ分割をとると、H と T による空間充填が得られます。それは、我々のタイリングが H の軸を中心として６０度回転による回転対称性を持っていることから、これらの点が、H や T を含む立方体の中心となることと、H と T において、それを含む立方体の中心から各面への距離は、面の形が同じ時に同じであることから分かります。

5　イマジナリーキューブパズル (H3T6)

この充填形をもとにしたパズルを考案しました。H 3 個と T 6 個を、それぞれ 1 個づつがちょうど入る立方体の２倍の大きさの立方体の箱に入れるというも

のです。パズルとしてはこれだけでも十分に難易度があって面白いですが、数学的にも面白いものにするために、９個の立体を合わせた立体が箱の中心に対して星型をしている、つまり、箱の中心とその立体のどの点を結ぶ線分も線分全体がこの立体に含まれているという条件を加えます。これは、解において H と T が隙間なく詰まっていることを意味しており、これにより、箱の回転を除いて解が一通りに定まります。

このパズルを解いてもらう時には、最初に１個づつを通常の大きさの立方体の箱に入れてもらい、イマジナリーキューブであることを理解してもらいます。これ自体が十分に楽しめるパズルだということは、連載の１回目の時にお話ししました。これにより、８つまでは箱に入ることが分かります。問題は、９つ立体があることです。更なるヒントとして、最後の１つは真ん中に来ることを話して、真ん中の立体は周りの８つと接する必要があると話します。それから、T が立方格子の頂点に" はまる" 多面体である話をして、真ん中の T が図 3 のように置かれることを見せます。あとは、この T の８つの面に対し、同じ形の面が接するように周りの８つの立体を考えれば、このパズルの解が得られます。この９つの立体は、空間充填において「T の形の空間」の周りの８つの立方体の内部を切り出したものです。この解は 3 回対称性をもっているので、見た目にも綺麗です。

１回目にも紹介した中川宏氏（積み木インテリアギャラリーいたち丸）に木工でこのパズルを作って頂きました。木製のピースは質感があって、きれいに組みあわさっていく楽しさがあります。パズルを解く楽しみを通じて、イマジナリーキューブの幾何が分かるこのパズルは、私の自信作です[1]。

6　イマジナリーキューブ・オブジェ

第１回にお話したように、代表的な極小凸イマジナリーキューブが１６個あります。これらを合わせてイマジナリーキューブにできないでしょうか。つまり、

[1]京都大学総合博物館ショップにて、販売予定です。

図 10: H3T6 パズル

全部くっつけて、３方向から見て正方形に見えるように配置できないでしょうか。

前回お話したように、立方体を $k \times k \times k$ の小さな立方体に分けてそこから k^2 個を選ぶとイマジナリーキューブにできます。上に述べたように、$k = 3$ の時には、そのような配置は (H) と (T) の２種類存在します。また、$k = 4$ の時にはそのような配置は、36 通りあることを前回お話しました。その中で、図 11 の２つは特に綺麗なものです。

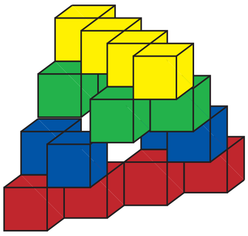
(S) は、シェルピンスキー四面体の２次近似です。(C) は回転を行う４つの 1/2 の縮小写像によりできるフラクタルの２次近似です。さて、(S) と (C) はイマジナリーキューブですが、これら１６個の立方体を他のイマジナリーキューブに置き換えたものもイマジナリーキューブになります。そこで、これらを１６種類の極小凸イマジナリーキューブに置き換えて、イマジナリーキューブ・オブジェを作成しました（図 12, 図 13)。

立体オブジェとして制作するには、それぞれのイマジナリーキューブが頂点どうしで接する必要があります。それだけでなく、(S) の立方体の配置では４個、(C) の立方体の配置では５個の格子点において周りに４つの立方体が集まっているのですが、そこには、前

(S):

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

(S-1)

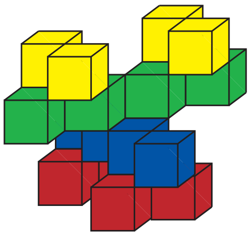


(S-2)

(C):

3	4	1	2
4	3	2	1
1	2	3	4
2	1	4	3

(C-1)



(C-2)

図 11: イマジナリーキューブ・オブジェで用いた立方体の配置。(1) 対応する Latin 方陣;(2) 立方体の配置。

者では反三角錐台 T の形の穴が、後者では４つの反三角錐台と１つの正八面体の穴ができるように、イマジナリーキューブの配置を工夫しました。ここでも、T という多面体の特筆すべき性質が活かされています。この２つの作品は紙製で、立方体の面方向には異なる６色で、穴に向かう面は黒色で、それ以外の面は白で色づけされています[2]。

さらに、(C) の立体を木工で作りました (写真 15)。紙製の立体を頂点でつなげるのにも技がいりましたが[3]、木工で作るとなると、さらに工夫が必要です。ここで、穴の形が反三角錐台と正八面体であることが活きてきます。まず中川氏に、木工で反三角錐台と正八面体のフレームを作ってもらいました。フレームの部分は黒っぽい木で作られています。あとは、それに立体を貼りつけるだけです。

このオブジェは、全体の構図はフラクタルの近似というバランスのとれたものになっていますが、個々の構成要素はバラバラな形をしています。それが、ある

[2]工作は、当時学生の寺山慧君、名田元君、増田 要平君に手伝ってもらいました。

[3]図 12, 13 のオブジェは裏側から糸で結合されています。これは寺山君の考案です。

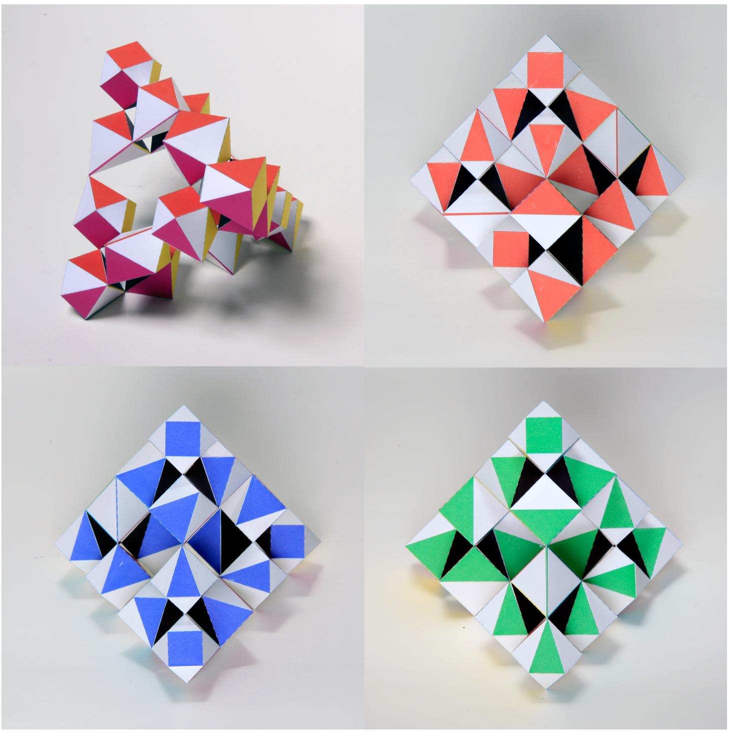


図 12: (S) の配置を用いて作られたオブジェを４つの方向からの像

方向から見ると、きれいにそろって正方形に見えます。そうして見ているうちに、一つ一つの立体の個性に気がつきます。正四面体や立方八面体などのお馴染みの形や、立体 H と T も含まれています。この形に基づくオブジェを公園などの人が多く集まる場所に作り、一般の人にゆっくり味わってもらうのが私の夢です。

7 Bridges Conference

このような立体造形は、数学の面白さを一般の人々に伝えたいという気持ちから始めました。そのような作品を発表する場所として、京都大学名誉教授の宮崎興二先生に、Bridges Conference (http://www.bridgesmathart.org) を紹介していただき、2007 年と 2010 年に発表をしてきました。この会議は、数学と芸術の結びつきに関するもので、幾何学的な絵画や造形だけでなく、音楽、建築、文化、映像、いろんな内容が含まれます。通常の論文発表だけでなく、芸術展、音楽会、映像、演劇

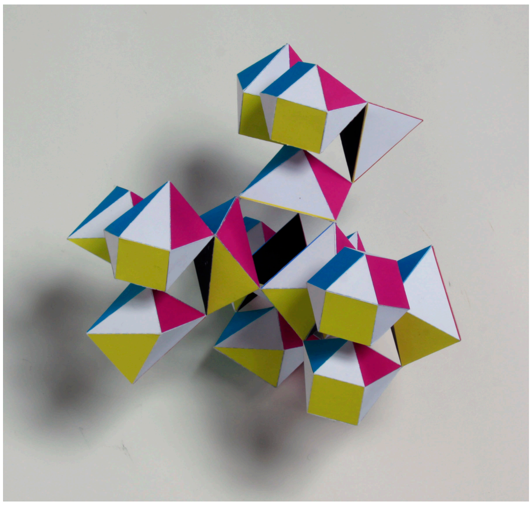


図 13: (C) の配置を用いて作られたオブジェ

の夕べ、実践ワークショップなど、様々な催しがあります。

2010 年の会議では、芸術展で、１６個のイマジナリーキューブとこの木製のオブジェ、そして、紙製のオブジェの周りに周りに 3 枚の鏡を配置して同時に 3 つの正方形の像も見えるようにしたオブジェ（図 15）の展示を行いました。この会議は、何より活気があり、皆が本当に楽しんで行っているのが分かります。私は決して芸術的センスを持ち合わせている訳ではありませんが、自分が見つけた数学で人々を楽しませられるというのは、最高の喜びでした。

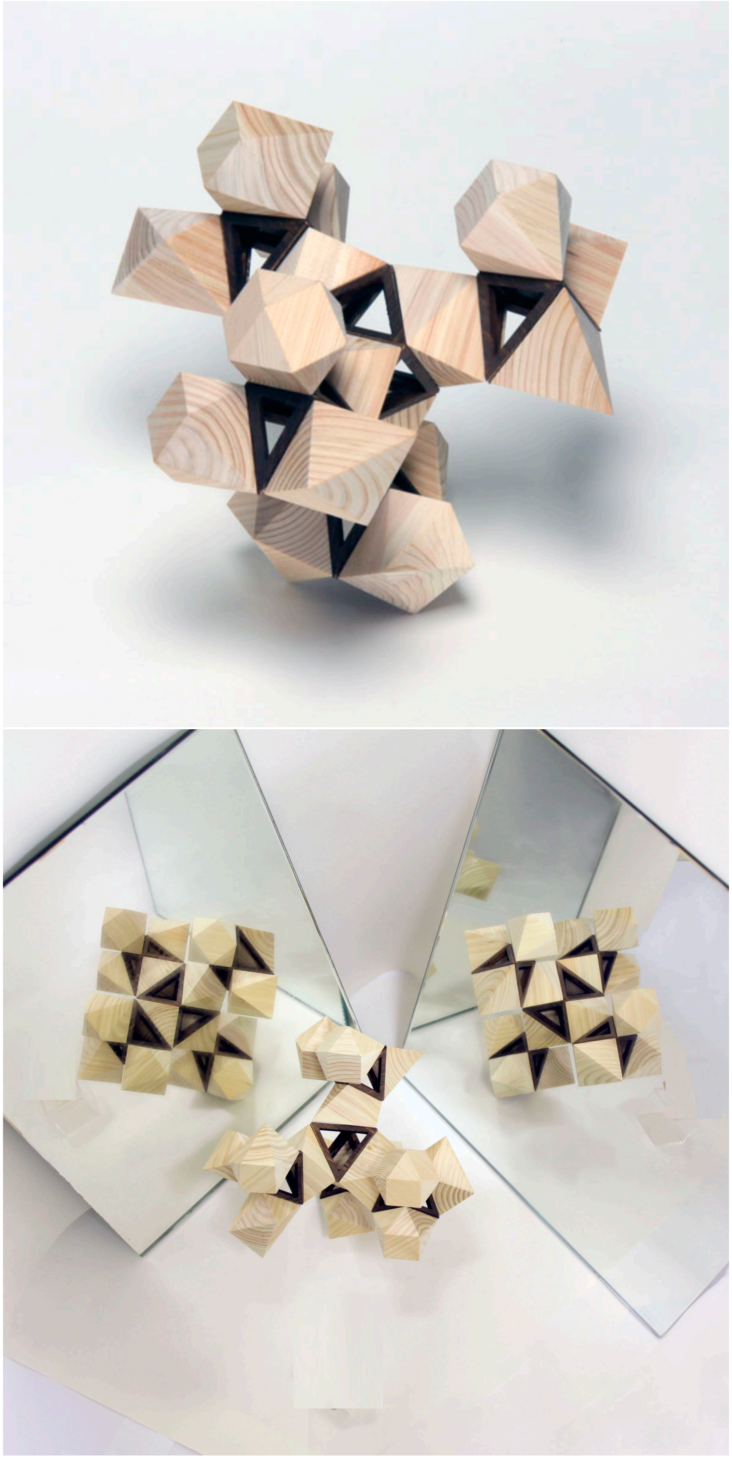


図 14: イマジナリーキューブ・オブジェ

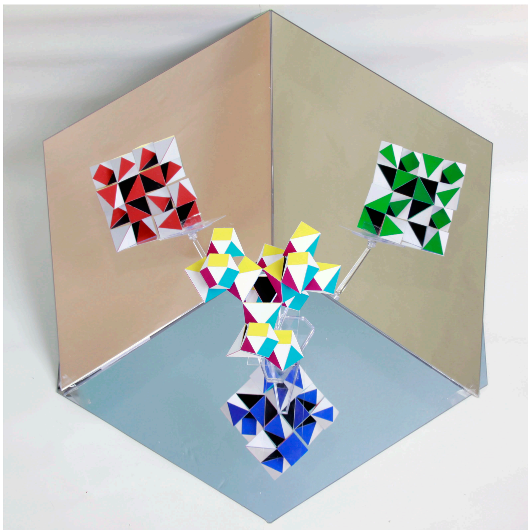


図 15: ３枚の鏡の前に置かれた (C) のオブジェ