

正三角形間のコネクターを基礎図形として構成できる図形について

立木 秀樹

京都大学 人間・環境学研究科

tsuiki@i.h.kyoto-u.ac.jp

Figures composed of connectors of regular tetrahedrons

Hideki Tsuiki

Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

Abstract: We study figures constructed from two connected kites. Sierpinski triangle and many tessellation patterns are constructed. They are exactly patterns constructed by the cellular automaton with the rule $(100, 001 \rightarrow 1, \text{others} \rightarrow 0)$.

Keywords: Sierpinski triangle, Cellular automaton

シェルピンスキー三角形の近似図形を，3D プリンタで作成した基本ピースから物理的に組み立てることを考える。正三角形を組み立てていったのでは，2つの正三角形を頂点で接続する必要が生じる。そこで，正三角形の $1/3$ の部分となるタコ型2つを頂点でくっつけた形（図 1）を基本とし，これをつなげていくことを考える。数学的に考えるのはこの形から構成された図形であるが，3D プリンタで制作する基本ピースは，頂点に幅をもたせ接着辺に凹凸をつけた形である（図 2，3，4）。

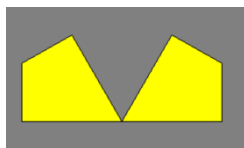


図 1

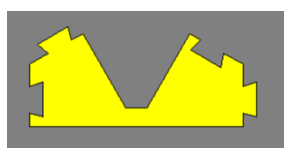


図 2

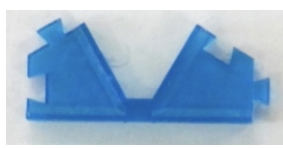


図 3

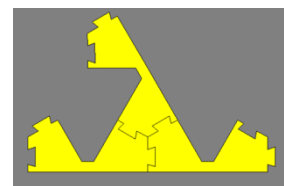


図 4

この基本ピースを無限個，接着辺が残らないようにつなげてできる（無限）図形を考える。まず，無限に大きなシェルピンスキー三角形の近似図形が作成できる。それは，図 5 からはじめて，それにピースを加えて図 6，図 7 と大きくしていった極限である。それは，図 5 を図 6 の 1,2,3 のどの部分として拡張するかを 1,2,3 で示し，同様に図 7 やその先の図形がどのように一つ前の図形を拡張したものを 1,2,3 で示していけば， $\{1,2,3\}$ の無



図 5

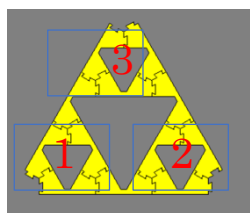


図 6

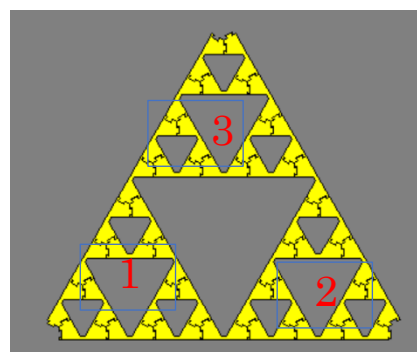


図 7

限列で表現できる。その中で、平行移動で重ね合わせることができるのは、あるところから始まる部分無限列が同じものだけなので、平行移動で重ね合わせられないものは非加算無限個ある。この中で、 $[1,1,\dots]$ に対応する図形は、正三角形の一つの頂点を起点とした拡張であり、接続辺が残るので、それを2つ基本ピースでつなげた図形を考える。

シェルピンスキー三角形以外にも、基本ピースからできる無限図形が存在する。それは、図4以外に図8も基本ピースから正三角形を作るつなげ方になっていることに起因する。このように、同一の（下向きの大きな）正三角形を幾つも、辺上に他の正三角形の頂点が来るように平行移動しつつ描いていき、残された部分を構成する2種類の正三角形をシェルピンスキー三角形の n, m 次近似で埋めてできる図形（それは、 p_3 対称性を持つ）を全て作ることができる。下图9,10,11はそれぞれ、 (n,m) が $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ の場合である。

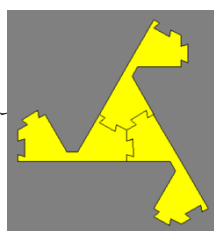


図 8

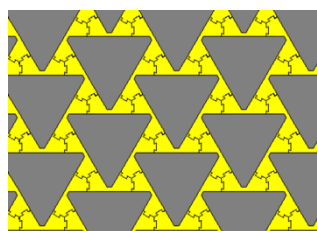


図 9

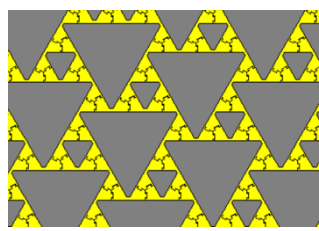


図 10

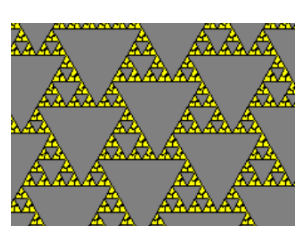


図 11

この基本ピースからできる図形全体を考えてみる。それは、ピースは必ず3つ繋がって正三角形をなすことから、図12の三角形の集まりの部分集合(図13はその例)をなすはずである。それは、どの頂点においても、そこでつながる2つの正三角形のうち0個か2個を含んでおり、よって、各行は上の行の排他的論理和になっている。よって、黒色の正三角形と反対向きの灰色の正三角形を全て正方形にみたてれば、このピースから作られる図形は、 $(001, 110 \rightarrow 1, \text{その他} \rightarrow 0)$ というセルオートマトンが生成する図形と対応している。

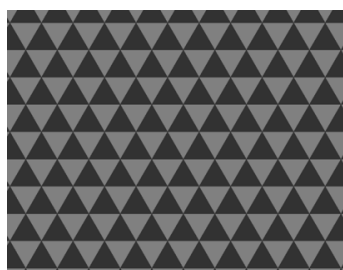


図 12

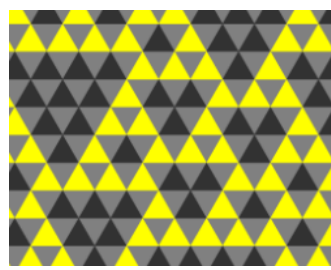


図 13

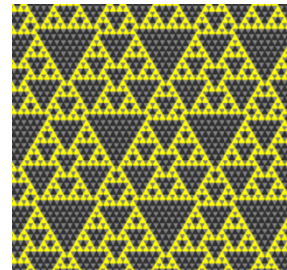


図 14

このセルオートマトンとの対応関係は、正三角形の頂点方向となる3方向全てで成り立っている。また、上の行は、1箇所の0,1を決めれば下の行から決まることにも注意されたい。この性質から、このピースで作れる p_3 対称性を持つものをいくつか求めたが、上にあげたもの以外に十分に複雑な模様も現れた。図14にその一例を示す。

このように、この基本ピースを組み合わせることで、シェルピンスキー三角形や、様々な繰り返し模様だけでなく、セルオートマトンと関係のある、規則性と複雑性を適度に組み合わせた図形ができる。今回は展示も行っているのでも、そのことを楽しんでもらいたい。図2の3次元版（凹凸の代わりに磁石を用いる）で同様のことを行くと、シェルピンスキー四面体のみができる[1]。それに対し、接続面に磁石による制限をつけない場合が、今回の研究の3次元版と考えられる。

[1] Hideki Tsuki, "Constructing Sierpinski Tetrahedrons from Connector Pieces", in Proc. Bridges conference, 2023, to appear.